思维规律的研究

的

思维规律，

论其所依据者

逻辑的数学理论以及
概率。

由

乔治·布尔，法学博士
科克女王学院数学教授。

本译本由机器翻译生成，供快速理解条文与内部培训使用；
涉及合规判断或法律适用时，请咨询专业顾问，并以官方英文文本为准。
翻译您自己的文件，请选择桐鸾译馆 · https://www.ivyivy.com.cn
扫码关注服务号

到

约翰·赖尔，法学博士

副校长兼希腊语教授

在科克女王学院，

谨以此书献给

以证友谊与敬意

前言。

本书并非作者先前一部题为《逻辑的数学分析》的论著的再版。其较早的部分确实致力于同一目标，并且以建立同一套基本规律体系开篇，但其方法更为一般，应用范围也远为广阔。它呈现的是经过数年研究与思考而成熟起来的、关于理智操作的一种研究原则的成果，而该原则此前的阐述，是在其构想形成后数周之内写成的。

本书中与逻辑相关的部分，预设读者具备这门科学中最重要的术语的知识(按通常的处理方式)，以及对其一般对象的了解。在这些方面，没有比沃特利大主教的《逻辑要义》或汤姆森先生的《思维规律纲要》更好的指南了。对这类研究的兴趣在当下的复兴，在很大程度上似乎应归功于前者。此外还需要对代数原理有所了解，但这一应用不必超出解简单方程的范围。对于研究那些与概率论相关的章节，则需要稍多一些的代数知识，尤其是消元学说以及含有一个以上未知量的方程的解法。关于题材的预备知识，可在《拉德纳万有文库》和《实用知识文库》中关于概率的专门论著中找到，前者出自德摩根教授之手，后者出自约翰·卢伯克爵士之手；还可在一系列由凯特勒先生的法文著作译出的有趣书信中找到。本书中还将给出其他参考文献。初次阅读时，读者可自行决定略去第x、xiv和xix章，以及任何他认为不吸引人或无关的应用部分。

在本书的不同部分，尤其是在最后一章的注释中，将会发现对古今多位作者的引用，这些引用主要是为了阐明关于哲学史的某种观点。关于这些引用，作者认为有必要补充说明，他从未在任何情况下给出

对于他经仔细审查后认为既无平行权威支持、亦不符合其所出著作之总体主旨的引文，他未曾采信。尽管他本乐于避免引入任何可能被解释为炫耀学问的内容，但他感到，无论对他的主题还是对真理而言，正文中的陈述都应当附有可供验证的手段。而如今，在结束一项其规模鲜有人能凭其表面成果加以判断的工作之际，倘若允许他片刻谈及自己从事并如今搁置此项任务时的心情，他愿说，他从未怀疑它值得他竭尽全力；他感到，它所能揭示的任何真理都不是私人的或任意的东西，其本质不依赖于任何人的意见。他完全清楚，有学识、有能力的学者在逻辑问题上所持的意见，与他的整部论证与程序所依据的观点直接相反。尽管他相信那些意见是错误的，他也意识到自己的观点可能不知不觉地受到另一种影响而扭曲。他尤其感到那种理智偏见的危险，这种偏见是长期关注真理的某一特定方面所容易产生的。但他相信，从这种意见的冲突中，同一真理只会更加摆脱任何个人掺杂而浮现出来；其各个部分将以其恰当的比例被看待；并且，由于可能附着于其阐述的单纯形式之上的种种偏见，其中任何部分最终都不会被评价过高或看待过轻。

作者希望向他尊敬的朋友、林肯的乔治·斯蒂芬斯·迪克森牧师记录他的感激之情，感谢他在修订本书过程中给予的诸多善意帮助，以及提出的一些重要建议。

5, Grenville-place, Cork, 1853年
11月30日。

目录。

章 i

本书的性质与设计， 1

章 ii

符号及其规律， 17

章 iii

规律的推导， 28

章 iv

命题的分类， 37

章 v

符号推理原理， 48

章 vi

论解释， 59

章 vii

论消去法， 74

章 viii

论还原， 87

目录。 vi

章 ix

简写方法， 100

章 x

完美方法之条件， 117

章 xi

论次级命题， 124

章 xii

次级命题中的方法， 137

章 xiii

克拉克与斯宾诺莎， 143

章 xiv

分析示例， 169

章 xv

关于亚里士多德逻辑， 174

章 xvi

论概率的理论， 187

章 xvii

概率的一般方法， 194

章 xviii

初等例示， 211

章 xix

论统计条件， 227

章 xx

论原因问题， 247

章 xxi

判断的概率， 293

章 xxii

智力的构成， 311

注。

在第261页的命题II中，事件x, y, z..的“绝对概率”所指的，简单地说就是这些事件的概率应当是什么，以便在把它们视为独立、且其概率为我们唯一数据的条件下，同样这些事件在条件V之下的计算概率应为p, g, r..。所附的关于瓮的问题的陈述必须以类似方式加以修改。该问题按实际陈述而言的真正解答是$p' = cp$, $q' = cq$，其中c是所抽出的球为白球、或为大理石球、或二者兼是的条件的任意概率。--见第270页，情形II。*

因此，既然通过逻辑还原，概率论中一切问题的解答都被归结为这样一种形式：从简单事件s、t等在给定条件V下的概率出发，要求确定这些事件在同一条件下某一组合A的概率，那么命题IV中证明的原则实际上如下：--“这种组合A在条件V下的概率，必须按照事件s、t等相互独立、并具有这样的概率来计算，即这些概率会使上述事件在同一条件V下所得出的概率成为数据中所赋予它们的那些概率。”我把这一原则视为自明的。同时，它容许进行无限的验证，既可直接进行，也可通过以它为基的方法所得的结果来进行。我认为应当补充一点：这一原则正是以上述形式首次呈现于我心里的，而我也一直是这样理解它的；所提到的那个特定问题中的错误，源于在选择具体例证时的疏忽。

第一章

本书的性质与设计。

1. 以下论著的设计，在于研究那些据以进行推理的心灵活动的基本规律；以微积分的符号语言将它们表达出来，并在此基础上建立逻辑科学并构造其方法；使该方法本身成为一般方法的基础，以应用于概率的数学学说；最后，从这些探究过程中所呈现的真理的诸元素中，收集一些关于人类心灵的本性与构造的可能暗示。

2. 这一设计并非全然新颖，几乎无需赘言，且众所周知，其逻辑与概率两大实践部门已受到哲学家们相当多的关注。确实，在其古代与经院形式中，逻辑这一主题几乎专与亚里士多德这一伟大名字相联系。正如它通过《工具论》中部分技术性、部分形而上学的论述呈现给古希腊那样，它几乎未经任何本质变化而延续至今。原创性探究的潮流反而转向了一般哲学的问题，这些问题虽源于逻辑学家的争论，却已超出其起源，并赋予相继的思辨时代以其特有的倾向与特征。波菲利与普罗克洛、安瑟伦与阿伯拉尔、拉穆斯与笛卡尔的时代，连同培根与洛克的最终抗议，作为该研究对人类思想进程的较远影响的例证浮现于心灵之前，部分在于提示富有讨论成果的论题，部分在于激起对其自身不当僭越的反驳。另一方面，概率理论的历史则呈现出远为更多的那种属于科学的稳定成长特征。在其起源阶段，帕斯卡的早期天才--在其更成熟的发展阶段，拉普拉斯所有数学思辨中最深奥者--都指向其改进；此处省略提及几乎不逊于这些名字的其他人物。正如逻辑的研究因其所引发的形而上学的亲缘问题而引人注目，概率的研究也因其所赋予数学更高部门的推动而引人注目。

科学。此外，这些主题中的每一个都被公正地视为既与思辨目的相关，也与实践目的相关。使我们能够从给定前提中推出正确推论，并非逻辑的唯一目标；概率理论也并非仅因其教导我们如何将人寿保险业务建立在稳固基础上，以及如何浓缩天文学、物理学或那个正迅速获得极大重要性特征的社会探究领域中无数观察记录中有价值的内容，而拥有其唯一主张。这两项研究还具有另一种旨趣，源自它们所投射于理智能力之上的光芒。它们教导我们语言与数如何作为推理过程的工具性辅助；它们在一定程度上向我们揭示我们共同理智的不同能力之间的联系；它们在证明性知识与或然性知识这两个领域中，向我们呈现真理与正确性的本质标准--这些标准并非来自外部，而是深深植根于人类诸能力的构造之中。这些思辨的目的，在旨趣、尊严，或许还可补充说，在重要性上，都不逊于那些它们在历史上与之相伴的实践目标。展开那些高级思维能力的秘密规律与关系--凭借这些能力，一切超出对世界与自身的单纯知觉知识的东西才得以获得或成熟--这是一个无需向理性心灵推荐的目标。

3. 然而，尽管本书设计的某些部分已被他人所考虑，但其总体概念、方法以及在相当程度上的结果，被认为是原创的。因此，我将在本章中提供一些预备性的陈述和解释，以便理解本论著的实际目标，并促进对其主题的处理。

其设计，首先在于研究那些据以进行推理的心灵活动的基本规律。此处无需进入任何论证以证明心灵活动在某种真实意义上服从规律，因而心灵的科学是可能的。如果这些是容许怀疑的问题，那么这种怀疑不应通过试图先验地解决争论之点来应对，而应通过将反对者的注意力引向实际规律的证据、引导他走向一门实际的科学来应对。因此，那种怀疑的解决将不属于本论著的导论，而属于论著本身。让我们暂且假定理智能力的科学是可能的，并让我们片刻考虑如何获得关于它的知识。

4. 像所有其他科学一样，关于理智活动的科学必须首先立足于观察--这种观察的对象正是我们意欲确定其规律的那些活动与过程。然而，尽管经验中的基础之必要性是 all 科学共有的条件，但当探究的主题是心灵时与当主题是外部自然时，这一原则可用于确定普遍真理的方式之间仍存在一些特殊差异。有必要将注意力引向这些差异。

自然界的普遍规律，大部分并不是感知的直接对象。它们或者是从大量事实中归纳出的推论，这些事实所表达的正是其中的共同真理；或者，至少在其起源上，是因果性质的物理假说，用以毫厘不爽地解释现象，并使我们能够预测它们的新组合。在一切情况下，并且按该词最严格的意义，它们都是概率结论，诚然，随着它们越来越多地得到经验的证实，它们会越来越接近确定性。但就概率的性质而言，按该词严格而本来的意义，它们从未完全摆脱。另一方面，关于心灵规律的知识并不需要以大量观察的收集作为其基础。普遍真理在个别实例中即可见及，并且它不是通过实例的重复而得到证实的。我们可以用一个明显的例子来说明这一立场。被称为亚里士多德*dictum*的*de omni et nullo*这一推理程式是否表达了人类推理的一条基本规律，这可能是一个问题；但它表达了逻辑中的一条普遍真理，这却不是一个问题。现在，这条真理通过对其应用的单一实例的反思，便在其全部普遍性中显现出来。这既是一个证据，证明所讨论的特定原理或程式建立在心灵的某条或某些普遍规律之上，也是对下述学说的说明：对这种普遍真理的感知并非来自对众多实例的归纳，而是包含在对单一实例的清晰领会之中。与这一真理相联系，还可以看到另一个同样重要的真理：我们关于理智能力之科学所依托的那些规律的知识，无论其范围如何或有何缺陷，都不是概率知识。因为我们不仅在个别例子中看到普遍真理，而且我们还把它看作一个确定的真理--一个我们对它的信心不会随着其实践验证经验的增加而继续增加的真理。

5. 但是，如果逻辑的普遍真理具有这样的性质，即当它们呈现于心灵时便立刻要求同意，那么建构逻辑科学的困难又在哪里呢?可以回答说，困难不在于收集知识的材料，而在于辨别其性质，并确定它们相互的位置和关系。一切科学都由普遍真理构成，但在这些真理中，有些只是原初的和基本的，另一些则是次级的和派生的。开普勒所发现的行星椭圆运动规律是天文学中的普遍真理，但它们不是天文学的基本真理。在纯粹数学科学中也是如此。已知的几乎无限多样的定理，以及无限可能的、尚不为人知的定理，共同建立在少数几条简单公理的基础之上；然而这些都是普遍真理。还可以补充说，这些真理对于一个足够精微的理智来说，会以其自身固有的光芒显现出来，而不需要那些思想的连接环节，那些令人疲倦且常常痛苦的演绎步骤，而实际上正是通过这些步骤才获得关于它们的知识。让我们把那些一切其他科学普遍真理都可从中演绎出来、并且它们又都可被重新分解为的那些规律和原理，定义为基本的。那么，如果我们把下述东西视为真正的逻辑科学，是否会出错呢?--它确立某些基本规律，这些规律由

心灵本身的证词所确认，允许我们由此通过齐一的过程演绎出其全部次级结论的链条，并为其实际应用提供完全普遍的方法。让我们考虑一下，在任何一门科学中，无论把它视为真理的体系还是视为实践技艺的基础，除了其派生真理体系的完备性以及它用以建立的方法的普遍性之外，是否还能有别的什么检验其规律的完备性和基本性质的标准。当然，其他问题也可能出现。便利、惯例、个人偏好，都可能提出自己的要求并值得注意。但就什么构成抽象完整意义上的科学这一问题而言，我认为除上述考虑之外，没有别的考虑真正具有任何价值。

6. 其次，本书旨在用微积分的符号语言表达推理的基本规律。关于这一点，只需说：这些规律本身便提示了这种表达方式，并赋予它一种独特而排他的、适合所期目的的适用性。一般推理中的心灵活动与代数这门特定科学中的心灵活动之间，不仅存在密切的类比，而且在相当大的程度上，支配这两类活动的规律存在精确的一致。当然，在这两种情况下，规律都必须独立地确定；它们之间的任何形式一致，只能通过实际比较`*a posteriori*来建立。借用数这门科学的记号，然后假定在其新的应用中支配其使用的规律将保持不变，那只不过是假说。确实存在某些植根于语言本性之中的一般原则，符号--它们不过是科学语言的元素--的使用正是由这些原则决定的。在某种程度上，这些元素是任意的。它们的解释纯粹是约定的：我们被允许按我们喜欢的任何意义来使用它们。但这种许可受到两个不可或缺的条件的限制--第一，一旦约定地确立了某种意义，我们在同一推理过程中绝不离开它；第二，支配这一过程的规律必须完全建立在所用符号的上述固定意义或含义之上。根据这些原则，逻辑符号的规律与代数符号的规律之间所能建立的任何一致，都只能导致过程的一致。两个解释领域保持分离和独立，各自服从自己的规律和条件。

现在，以下各页的实际研究把逻辑在其实践方面展示为一个由符号辅助进行的过程体系，这些符号具有确定的解释，并服从仅建立在该解释之上的规律。但与此同时，这些研究又表明，那些规律在形式上与代数的一般符号的规律相同，只增加了一点，即：逻辑的符号还进一步服从一条特殊规律(第二章)，而量的符号本身并不服从这条规律。关于这条规律的性质和证据，此处不打算详述。这些问题将在后面的一页中充分讨论。但是，由于这条规律构成了逻辑所处理的那些推论形式与数这门特定科学中出现的那些推论形式之间本质差异的基础，这条规律在

这个问题值得不止是顺便注意。可以说，它正是普遍推理的基础--它支配着那些先于逻辑演绎过程的理智的概念或想象活动，并且赋予这些过程本身以其实际形式和表达的大部分。因此可以断言，这条规律构成了胚芽或本源原则，而逻辑中任何对一般方法的接近都是这一原则或多或少完善的展开式。

7. 前面已经确立了这一原则(5)：任何假定的逻辑科学规律体系的充分性和真正基础性，必须部分地通过它们引导我们达到的方法的完善性来体现。因此，接下来需要考虑的是，逻辑中一般方法的要求是什么，以及在本著作的体系中这些要求得到了多大程度的满足。

逻辑学涉及两类关系--事物之间的关系与事实之间的关系。然而，既然事实是由命题来表达的，那么后一类关系至少就逻辑学的目的而言，可以化归为命题之间的关系。断言事实或事件A是事实或事件B的恒常结果，至少就此而言，可以等同于断言：肯定事件B发生的命题之真，总是蕴涵着肯定事件A发生的命题之真。于是，我们不说逻辑学涉及事物之间的关系与事实之间的关系，而可以说它关涉事物之间的关系与命题之间的关系。前一类关系，我们有一个例子见于命题--“所有人都是会死的”；后一类关系见于命题--“如果太阳被完全食，星辰就会变得可见”。前者表达“人”与“会死的存在者”之间的关系，后者表达基本命题--“太阳被完全食”;“星辰会变得可见”--之间的关系。我设想这类关系之中包括那些就事物而言肯定或否定存在的关系，以及那些就命题而言肯定或否定真理的关系。现在，让那些在其中表达关系的事物或命题，被称为表达此种关系的命题的元素。从这一定义出发，我们便可以说，任何逻辑论证的前提都表达某些元素之间的给定关系，而结论则必定表达那些元素之间、或它们一部分之间的一个隐含关系，即一个由前提所蕴涵或在推理上包含于前提之中的关系。

8. 现在，以此为前提，逻辑中一般方法的要求似乎如下：--

1. 由于结论必须在前提所涉及的元素的全部或一部分之间表达一种关系，因此我们必须具备手段，以消去那些我们不愿在结论中出现的元素，并确定前提在我们希望保留的元素之间所隐含的全部关系量。那些不在结论中出现的元素，用普通逻辑的语言来说，称为中项；逻辑学论著中所例示的消元种类，在于从两个命题中推出一个

共同元素或中项的命题中推出一个连接其余两项的结论。但本书所设想的消元问题具有远为广阔的范围。它提出的不仅是从两个命题中消除一个中项，而是一般地从命题中消除中项，不论其数目多少，也不论其联系的性质如何。对于这一目标，无论是逻辑的还是代数的过程，在其实际状态下，都没有任何严格的平行对应。在后一门科学中，消元问题已知受到如下限制：--从两个方程我们可以消除一个量记号；从三个方程消除两个记号；一般地，从n个方程消除n – 1个记号。但是，尽管这一在代数中必要的条件似乎在现有逻辑中也盛行，它在作为一门科学的逻辑中并没有本质性的位置。在那里，无论什么关系都不能被证明在待消除的项的数目与据以进行消元的命题的数目之间盛行。从代表单一命题的方程中，任意数目的代表逻辑中的项或元素的记号可以被消除；而从代表命题的任意数目的方程中，一个或任何其他数目的这类记号可以以类似的方式被消除。对于这样的消元，存在一个适用于所有情况的一般方法。这是逻辑记号那条已经引起注意的区分性规律的许多显著结果之一。

第二，逻辑学中一般方法的范围应当包括：用任何可容许的种类的命题，或以任何选定的次序的项，来表达结论各元素之间的最终关系。在种类的多样性中，我们可以计入逻辑学家用直言、假言、选言等术语所命名的那些种类。至于项的顺序上的选择或挑选，我们可以把凡是依赖于以下情形的东西都归入其中：特定的元素出现在那构成“结论”的命题的主词或谓词中、前件或后件中。但撇开学派的语言，让我们考虑究竟有哪些真正不同种类的问题可能呈现于我们面前。我们已经看到，最终的或被推出的关系的元素既可能是事物，也可能是命题。假定是前一种情况；那么可能要求从前提推出某个事物或某类事物的定义或描述，该事物或该类事物构成结论的一个元素，并用其中所涉及的其他事物来表达。或者我们可能形成某个事物或某类事物的概念，它涉及结论中不止一个元素，并要求用其他元素来表达它。再假定保留在结论中的元素是命题，我们可能希望确定如下各点，即：凭借前提，那些命题中任何一个单独来看是真的还是假的?--它们的特定组合是真的还是假的?--假定某个特定命题为真，是否会推出任何后果，如果会，相对于其他命题是什么后果?--假定就某些命题设定了某个特定条件，是否会推出任何后果，以及相对于其他命题是什么后果?如此等等。我说这些都是一般问题，它们

它应当落在逻辑学中一般方法的范围或领域之内以求解。或许我们可以把它们全都归入关于实践逻辑最终问题的这一陈述之下。给定一组表达某些元素之间关系的前提，无论这些元素是事物还是命题：要求明确地给出在任意提出的条件下、以任意提出的形式，那些元素中任何之间的全部关系结果。这一问题在其一切方面都是可解的，这一点将在以后显现。但上述对逻辑学中一般方法的性质与函数的探讨，并非为了注意到这一事实而引入。读者必须领会我们即将进入的这项研究的具体目标是什么，以及引导我们达到这些目标的原则是什么。

9. 也许在此可以说，亚里士多德逻辑学在其三段论和换位规则中，阐述了所有推理所由构成的基本过程，而除此之外，既无一般方法的余地，也无其必要。我无意指出通常逻辑学的缺陷，也不想超出必要范围去涉及它，只是为了如实阐明本书的性质。仅以此为目的，我要指出：第一，三段论、换位等并非逻辑学的终极过程。本书将表明，它们建立在更深远、更简单的过程之上，并可分解为这些过程，而这些过程构成了逻辑学中方法的真正元素。事实上，也并非所有推论都可还原为三段论和换位的特定形式。-- 参见第十五章。第二，即使所有推论都可还原为这两种过程(也有人主张仅可还原为三段论)，一般方法的必要性依然存在。因为仍然需要确定这些过程应以何种顺序相继进行，以及它们各自的特定性质，以便获得所期望的关系。我所说的所期望的关系，是指那种凭借前提将任意从前提中选出的元素联系起来的完整关系，并且还以任何期望的形式和顺序表达该关系。如果我们从数学科学--已知方法中最完善的范例--来判断，方法的这种指导功能构成了它的主要职责和特征。例如，算术的基本过程本身只是一个可能科学的元素。规定其性质是该方法的首要任务，但安排其顺序则是其后续的更高功能。在逻辑演绎的更复杂例子中，尤其是在那些为概率论中难题的解决提供基础的例子中，一种指导方法的帮助，如只有微积分才能提供的，是不可或缺的。

10. 由此可知，逻辑学的终极规律为何在形式上是数学的；为何它们除了一点之外与数的一般规律相同；以及为何在那一点上它们有所不同；--这些问题是若试图作出确定判断，或许离僭妄并不很远。它们大概超出我们有限官能所及的范围。也许可以允许心灵获得关于它自身所服从的规律的知识，而不同时也被赋予理解这些规律的根据与起源，甚至除了在极为有限的程度上，理解它们

与其他可设想的规律体系相比，对其目的的适合性。这样的知识对于科学的目的而言确实是不必要的，科学恰当地关注的是实际存在的东西，而不寻求偏好之根据或指定之理由。这些考虑为一切反对以演算形式展示逻辑学的抗议提供了充分的回答。并不是因为我们选择赋予它这样一种表现形式，而是因为思维的终极规律使这种形式成为可能，并规定了它的特性，并且看来还禁止以任何其他形式完善地展示这门科学，所以这种形式才要求被采用。应当记住，科学的事务不是创造规律，而是发现规律。我们并非创造自己心灵的构造，尽管我们大有能力改变其特性。而且，正如人类理智的规律不依赖于我们的意志，以这些规律为基础的科学的形式，在一切本质方面也独立于个人的选择。

11. 除对上述方法原理的一般陈述之外，本论著还将展示其应用于分析相当多样的命题，以及构成论证性前提的命题序列。这些例子选自各种作者，它们在复杂性上差异很大，并涵盖广泛的主题。尽管在这一特定方面，有些人可能认为选择的范围过于宽泛，但我认为没有必要为此作任何辩解。逻辑学作为一门科学能够有非常广泛的应用，这是被承认的；但同样确定的是，它的终极形式与过程是数学的。因此，任何先验的反对意见，若被认为存在于在讨论道德或一般哲学问题时采用这样的形式与过程，必定建立在误解或虚假类比之上。数学的本质并不在于通晓数与量的观念。作为一种普遍的心灵习惯，将符号过程应用于道德论证是否可取，是另一个问题。也许，正如我在别处所观察到的，[1]逻辑学方法的完善性，其主要价值也许在于作为其原理思辨真理的证据。取代通常推理的运用，或使其服从技术形式的严格性，将是一个深知那种理智劳作与论战之价值的人的最后愿望，那种劳作与论战赋予心灵强健的活力，教导它与困难搏斗，并在紧急情况下依靠自身。然而，可能会出现这样的情况：科学程序的价值，即使在那些公认属于理性通常支配之下的事情中，也可能被感受到并得到承认。在本著作中将找到一些这类例子。

12. 上述解释的逻辑的一般学说和方法，也构成了概率论及其相应方法的基础。因此，基于上述原则对这样一种理论和方法进行展开，将构成本论著的一个独立目标。关于这一应用的性质，在此作一些说明或许是可取的，尤其是因为

1 《逻辑的数学分析》。伦敦：G.Bell。1847年。

涉及到它所导向的解的性质。与此目标相关，还需要进一步详细说明逻辑分析结果所呈现的形式。

逻辑中先验方法作为概率论基础的必要性之根据，可以用几句话来说明。在我们能够确定一个特定事件的预期发生频率依赖于任何其他事件的已知发生频率的方式之前，我们必须熟悉这些事件本身之间的相互依赖关系。用术语来说，我们必须能够将所求概率的事件表达为已知概率的事件的函数。然而，这种明确的确定在所有情况下都属于逻辑学的范畴。概率，在其数学意义上，允许数值的度量。因此，概率的主题同等地属于数的科学和逻辑的科学。在承认这两个元素的协同存在时，本论著与所有先前的论著不同；并且由于这种差异不仅影响大量情况下问题可解性的问题，而且在所获得的解中引入了新的和重要的元素，我认为有必要在此较为详细地陈述以下各页中所发展的理论的特殊后果。

13. 一个事件的概率的度量通常被定义为一个分数，其中分子表示有利于该事件的情况数，分母表示有利和不利情况的全部数目；所有情况被假定为同等可能发生。本著作采用该定义。同时表明，主题还有另一个方面(稍后将提及)，它可以同样被视为基本的，并且实际上会导致相同的方法和结论体系。可以补充说，就概率论公认的结论所及的范围而言，并且就它们是基本原理定义的推论而言，它们与本著作方法的结果(在推论中被假定为同样正确)并无不同。

再者，尽管概率论中的问题以各种面貌呈现，并可能被代数的和其他条件以各种方式修改，似乎存在一个所有这类问题--或每个问题中真正属于概率论的部分--都可被归入的一般类型。参照数据和所求来考虑，该类型可描述如下：-1. 数据是一个或多个给定事件的概率，每个概率要么是其所属事件的绝对实现的概率，要么是在给定假设条件下其实现的概率。2. 所求，或寻求的目标，是某个其他事件的实现(绝对地或条件地)的概率，该事件在表达上不同于数据中的事件，但或多或少涉及相同的元素。就数据而言，它们要么是因果地给定的,--如当骰子特定投掷的概率从对该骰子构造的知识中推导出来时，--要么它们是从对事件成功或失败的重复实例的观察中得出的。在后一种情况下，一个事件的概率可以被定义为有利数与全部数目之比所趋向的极限

在观察到的案例中，随着观察无限地继续下去，趋近于(自然界的齐一性是被预设的)。最后，就所讨论事件的性质或关系而言，还剩下一个重要的区分。那些事件要么是简单的，要么是复合的。所谓复合事件，是指其在语言中的表达或在思想中的概念依赖于其他事件的表达或概念的事件，而这些其他事件相对于它而言可以被视为简单的事件。说“下雨”，或者说“打雷”，是表达一个简单事件的发生；但说“下雨且打雷”，或者说“要么下雨要么打雷”，是表达一个复合事件的发生。因为那个事件的表达依赖于基本表达“下雨”、“打雷”。因此，简单事件的判准并不是其本性中任何被设想的简单性。它完全建立在它们在语言中的表达方式或在思想中的概念方式之上。

14. 现在，现有概率论使我们能够解决的一个一般问题如下，即：给定任何简单事件的概率：求一个给定复合事件的概率，即一个以给定方式由给定简单事件复合而成的事件的概率。当所求其概率的复合事件受制于给定条件，即受制于也以给定方式依赖于给定简单事件的条件时，该问题也可以解决。除这个一般问题之外，还存在一些其解法原理已知的特殊问题。与原因和结果有关的各种问题，在原因互斥这一特殊假说下可以用已知方法解决，但显然不能以其他方式解决。除此之外，对于可被视为该科学的一般问题--即：给定任何事件(简单的或复合的、受条件的或不受条件的)的概率：求任何其他在表达和概念上同样任意的事件的概率--的解决，是否已取得任何进展，尚不清楚。在这个问题的陈述中，甚至没有设定：其概率被给定的事件与所求其概率的那个事件应当涉及某些共同元素，因为一种方法的职责就是判定一个问题的数据对于所考虑的目的而言是否充分，并在不充分时指出缺陷之所在。

这个问题，在其最无限制的陈述形式中，可由本论著的方法解决；或者，更确切地说，其理论上的解答已完全给出，而其实际上的解答则仅取决于纯粹数学的过程，例如方程的消解与分析。一般解的顺序与性质可如此描述。

15. 首先，通过逻辑演算的预备方法，总是可以把所求其概率的事件表达为那些其概率被给定的事件的逻辑函数。结果具有如下性质：设X表示所求其概率的事件，A、B、C等表示其概率被给定的事件，那些事件要么是简单的，要么是复合的。于是，事件X与事件A、B、C等之间的整个关系，被推导为数学家所称的展开式的形式，

在最一般的情形下，它由四个不同类别的项组成。第一类表达的是事件A、B、C的那些组合，它们既必然伴随又必然指示事件X的发生；第二类表达的是那些必然伴随但并不必然蕴涵事件X发生的组合；第三类表达的是那些与事件X相关联时的发生是不可能的、但并非在其他方面不可能的合；第四类表达的是那些在任何情况下其发生都是不可能的合。我将不再详述这一对问题的逻辑分析结果的陈述，只进一步指出：它所呈现的元素，恰恰就是那些据以能够或唯独能够影响对事件X的期望(该期望依赖于我们对事件A、B、C的知识)的元素。一般推理会证实这个结论；但一般推理通常不足以理清那错综复杂的事件与情况之网，而上述解法必须从其中演化出来。达到这一目标构成了对我所提出的问题的完整解决的第一步。应当注意，迄今为止，解决的过程是逻辑的，即由具有逻辑意义的记号进行，并导致一个可解释为命题的方程。让这个结果被称为最终逻辑方程。

过程的第二步值得仔细注意。从先前步骤引导我们得到的最终逻辑方程出发，通过审视，推导出一系列代数方程，这些方程隐含地包含着所提出问题的完整解决。关于实现这一过渡的方式，只需说：在把事件的概率表达为它们所依赖的其他事件的概率的代数函数的那些定律，与事件的逻辑联系本身据以表达的那些定律之间，存在着一种确定的关系。这种关系，如同已经提到的其他形式定律的吻合一样，并非建立在假说之上，而是通过观察(I.4)和反思为我们所知的。然而，如果它的实在性被先天地假定为概率之定义本身的基础，那么严格的演绎就会由此引导我们得出公认的数值定义，作为其必然结果。概率论正如已经指出的(I.12)，与逻辑学和算术保持着同样密切的关系；而且就结果而言，我们把它视为从后一门科学中产生，还是视为建立在把二者联系起来的相互关系中，都是无关紧要的。

16. 在由上述方法推出的一般解中，有一些或许令数学家感兴趣的情况，值得予以注意。

1. 由于该方法独立于数据的数目和性质，当后者不足以确定所求之值时，它仍然适用。在这种情况下，解的最终表达式将包含带有任意常数系数的项。与这些项相对应，最终的逻辑方程(I.15)中也将出现相应的项，对这些项的解释将告知我们需要哪些新数据才能确定那些常数的值，从而使数值解完整。

如果无法获得这样的数据，我们仍然可以通过赋予常数其极限值0和1，来确定所寻求的概率必定位于其间的界限，而不依赖于一切进一步的经验。当所寻求其概率的事件与那些其概率已给出的事件完全无关时，如此为其值所获得的界限将是0和1，正如它们显然应当如此，而常数的解释将只会导致对原问题的重新陈述。

第二，最终解的表达式在所有情况下都将包含一个特定的量的元素，该元素可由一个代数方程的解来确定。当该方程的次数较高时，关于如何选取恰当的根，似乎会产生困难。诚然，在某些情形中，所给元素与所求元素都显然受到必要条件的限制，以致别无选择。但在复杂的情形中，单凭推理的力量去发现这类条件，将是毫无希望的。为此需要一种独特的方法--一种或许不无理由地可称为统计条件演算的方法。关于这种方法的本性，我在此不再进一步论述，只须说明：它如同前述方法一样，建立在运用“最终逻辑方程”的基础之上，并且它明确地指定：第一，数据的数值元素之间必须满足哪些条件，才能使问题成为真实的，即源自一种可能的经验；第二，所求概率必定被限制于其内的数值界限--假如它不是由理论所确定，而是直接从数据所由导出的同一现象系统中通过观察推演出来的话。显然，这些界限将是所求概率的实际界限。现在，假定数据服从上述指定给它们的条件，则在我所考察的每一个实例中，最终代数方程似乎都存在一个根，而且只有一个根，服从所要求的限制。一切歧义的来源由此被消除。甚至可以说，与代数方程理论有关的新真理就这样被附带地揭示出来。值得注意的是，前述讨论所涉及的那个特定的量的元素，仅仅依赖于数据，而完全不依赖于所提问题的所求者。因此，每一个特定问题的解，都为一系列问题解开了困难之结，即，为那一系列以拥有共同数据为标志、而与其所求者的性质无关的问题解开了困难之结。每当需要从一组特定的数据推演出一系列相互关联的结论时，这一情形都是重要的。而且，它还赋予特定问题的解以那种由其对某个中心的和基本的统一体的依赖而来的关系特性--这种特性常常标志着一般方法的应用。

17. 然而，尽管上述考虑以及其他类似性质的考虑，足以证成本论著中用于解决概率论问题的方法是一般方法，但并不能由此推出我们在所有情况下都免于诉诸假设性根据的必要性。已经指出，一个解可能完全由带有任意常数系数的项组成，--事实上可能完全是不定的。

将本书的方法应用于其范围内一些最重要的问题--如果仅仅使用经验材料--就会产生这种性质的结果。在此类情形下，要获得一个确定的解答，就必须求助于或多或少具有独立概率、但无法精确验证的假说。一般而言，这类假说与经验的直接结果不同，它们具有逻辑的而非数值的性质；它们规定现象发生的条件，而不是指定现象发生的相对频率。然而，这种情况并不重要。无论其性质如何，所假定的假说从此必须被视为属于实际材料的一部分，尽管显而易见，这会使解答本身带有某种假说的性质。在这样理解实际所用材料的可能来源之后，该方法便是完全一般的，但对于所引入的假说要素的正确性，它当然并不比对于从经验中获得的数值材料的正确性负有更多责任。

为说明这些评论，我们可以指出，天文观测的归算理论[2]部分地建立在假说的基础之上。它假定了一些关于误差性质、误差以过大或过小形式出现的相等概率等等的命题，没有这些命题，就不可能从一组相互冲突的观测中得出任何确定的结论。但是，一旦承认上述命题，其余的研究就严格属于概率论的领域。类似的评论也适用于那个重要问题，即试图从审议会议多数派的记录中推导出其成员之一作出正确判断的平均概率。如果将本论著的方法应用于单纯的数值材料，所得到的解答就是上述那种完全不确定的解答。而为了更突出地表明这些材料本身的不足，对解答中出现的任意常数(I.16)的解释，仅仅是对原问题的重新陈述。然而，如果承认个体心灵中意见独立形成的假说，无论是像拉普拉斯和泊松的思辨中那样绝对地承认，还是在实际材料所施加的限制之下承认(如本论著第二十一章将要表明的那样)，问题就呈现出远为确定的性质。显而易见，概率论的最终价值必定在很大程度上取决于这类中介假说的正确形成，因为在这些情形下，纯粹实验的材料不足以获得确定的解答，而通过对最终逻辑方程的解释所指示的那种进一步经验又是无法获得的。另一方面，对于那些从其本性上就超出人类理解范围的题材，过于轻率地形成假说，必定会反过来损害概率论的信誉，并倾向于在一般心灵中对其最合法的结论投下怀疑。

18. 在此推测这个问题或许为时过早

2 作者计划在另一部著作或未来的附录中处理这一主题。在本论著中，他避免使用积分学。

抽象科学的方法是否有可能在未来的某一天，在社会问题的研究中发挥与它们在各个物理探究部门中所发挥的作用完全相称的作用。试图在纯粹的`*a priori*推理依据上解决这个问题，很可能会使我们误入歧途。例如，考虑人类自由能动性，乍看之下似乎会排除这样一种观念：社会系统的运动竟然会表现出我们在物理必然性统治下所期待的那种有序进化的特征。然而，统计学家的研究已经向我们揭示了与这种预期相悖的事实。因此，犯罪和贫困的记录呈现出一种在人类需求和激情的干扰性影响未被感受到的地区所未知的规律性。另一方面，季节的失调、火山的喷发、植物枯萎病的蔓延或动物界流行病的传播--这些显然或主要是自然原因产物的现象--却拒绝服从于有规律的、可理解的法则。“像风一样多变”是一句谚语。对这些问题的反思在某种程度上教导我们纠正早先的判断。我们认识到，在必然性的支配下，我们不应期待一种人类观察可感知的秩序，除非其产生原因的作用足够简单；另一方面，也不应认为个体的自由能动性与他所构成的系统运动的规律性不相容。人类自由作为我们意识的一个明显事实而凸显出来，同时，据我理解，它也是从我们能够研究其科学构造的那部分心灵的本性出发，通过类比(第二十二章)得出的一个高度可能的演绎结论。但无论它是作为基于意识的事实被接受，还是作为理性所认可的结论被接受，都必须以不与观察的既定结果相冲突的方式来解释，即：有大量人群参与产生的现象，实际上确实表现出非常显著的规律性程度，使我们能够在每个相继的时代收集到那些要素，对其状态和进步的估计--就其在外部结果中所表现而言--必须依赖于这些要素。因此，不存在任何健全的`*a priori*反对意见来否定那种为社会统计学之实验基础所必需的数据类型的可能性。再者，无论本论著可能达成其他什么目标，可以推定它将使以下一点不再有疑问：存在一个抽象原理的体系以及建立在这些原理之上的方法体系，凭借它们，任何社会数据的集合体都可以被使得以明确的形式产出其所隐含的任何信息。在数据极其复杂的情况下，获取这些信息可能存在极大的困难--这种困难并非源于理论的任何不完善，而是源于它所指向的分析过程的繁重性质。完全可以想象，在许多情况下这种困难可能只有通过联合的努力才能克服。但是，我们在理论上于所有情况下都拥有，并且在实践上--只要所需的计算劳动能够提供--也拥有从统计记录中引出埋藏在大量数字之中的一般真理之种子的手段，这一立场，据我理解，可以完全有把握地予以肯定。

19. 但超出这些一般立场之外，我不敢以确信的措辞来谈论。将科学方法应用于统计记录所可能预期的结果--超出那些无需此类辅助即可发现的结果之上--是否足以补偿所涉及的劳动，使得以适当规模进行此类研究值得为之，这一点或许只能由经验来确定。值得期望，而且或许可以不失大胆地预期，在这一事例中如同在其他事例中一样，科学的抽象学说应当服务于超越理智满足之上的目的。而且，鉴于各门科学被演化出来并相继为人类服务贡献其助力的明显次序，似乎并非很不可能有一天会到来，届时类似的助力可能从知识领域中与人类福祉要素更为密切相关的部门中产生。然而，让本论著的思辨目前仅仅立足于其应被视为真理的主张之上。

20. 我最后打算从先前探究的科学结果中，努力引出一些关于人类心灵之本性和构造的一般性提示。关于这种推论之可能性的依据，此处无需深入探讨。一两条一般性观察或许足以指示我将努力遵循的路径。不得不承认，我们对逻辑科学的看法必然会在很大程度上影响、或许主要决定我们对理智能力之本性的意见。例如，推理是否仅仅在于应用某些心灵原初被印刻于其上的最初或必然真理，还是心灵本身就是一个法则的所在，其运作在特殊公式中如同在一般公式中一样明显而确凿，还是如某些并非不杰出的作者似乎主张的那样，一切推理都是关于特称的；这个问题，我说，不仅影响逻辑科学，而且关乎对理智能力之构造形成正确看法。再者，如果得出结论认为心灵按其原初构造是一个法则的所在，那么关于它服从这一法则之性质的问题--例如，它是一种基于必然性的服从，如同维持天体运行并保持自然秩序的那种服从，还是一种完全不同类型的服从--也是一个具有深刻思辨意义的问题。此外，如果心灵确实被判定为法则的主体，如果其法则也确实被指定，那么它们对不同时代人类思想进程之或然或必然影响的问题，就是一个具有重大重要性、值得耐心探究的问题，既是哲学的问题也是历史的问题。这些以及其他问题，我打算在本论著的结尾部分加以讨论，尽管可能不够完善。它们或许属于或然的或推测的知识领域，而非确实的知识领域。但可能发生的情况是，在没有充分根据达到科学确定性之处，可能存在足够的类比依据来提出高度或然的意见。在我看来，将这一讨论完全保留为本论著主要事务的续篇似乎更好--

即对科学真理和法则的探究。经验充分教导我们，在一切追寻真理的探究中，前进的恰当次序是从已知到未知。即使关于人类心灵之哲学和构造，也有部分已被完全置于我们探究的范围之内。以对我们本性中那些部分的适当认识作为一切努力的基础，去穿透那位于它们之上和之外的推测领域的阴影与不确定性，是最符合我们当前状况之限度的做法。

第二章

论一般的记号，以及特别适于逻辑科学的记号；亦论该类记号所服从的规律。

1. 语言是人类理性的工具，而不仅仅是表达思想的媒介，这是一条普遍承认的真理。本章拟探究究竟是什么使语言如此服务于我们最重要的理智能力。在这一探究的各个步骤中，我们将被引导去考虑语言的构造--将其视为一个适应于某个目的或目标的系统；去研究其元素；去寻求确定它们相互的关系和依赖；并去探究它们以何种方式有助于达成那个作为系统之各协调部分它们所指向的目的。

在进行这些探讨时，没有必要进入那个著名的经院问题的讨论，即语言是否应被视为推理的本质工具，或者另一方面，我们是否可能在没有其帮助的情况下进行推理。我认为这个问题与本文的目的无关，理由如下，即：科学的事业在于研究规律；而且，无论我们将符号视为事物及其关系的代表，还是视为人类理智的概念和心灵活动的代表，在研究符号的规律时，我们实际上是在研究推理的表现规律。如果这两种探讨之间存在差异，那也是一种不影响形式规律的科学表达的差异，而形式规律正是本工作现阶段的研究对象，它只涉及那些结果呈现给心灵关注的方式。因为尽管在研究符号的规律时，`*a posteriori*，直接考察的对象是语言及其使用规则；而在将思维的内在过程作为直接探究对象时，我们以更直接的方式诉诸个人的意识--但将会发现，在两种情况下所获得的结果在形式上是等价的。我们也难以设想，地球上无数的语言和方言竟能在漫长的世代更迭中保留如此之多共同而普遍的东西，若非我们确信存在

他们一致性的某种深层基础在于心灵本身的规律之中。

2. 一切语言由以构成的元素是符号或记号。词是符号。有时据说它们代表事物；有时代表心灵将事物的简单观念结合为复杂概念的活动；有时它们表达我们在经验对象中所感知的行动、承受或单纯性质的关系；有时表达感知心灵的种种情感。但是，词虽然以这种或那种方式履行符号或代表记号的职能，却并非我们所能使用的唯一符号。只对眼睛说话的任意标记，以及诉诸其他感官的任意声音或动作，同样具有符号的性质，只要其代表职能被明确规定并得到理解。在数学科学中，字母以及+、–、=等符号被用作符号，尽管“符号”一词更多地用于后一类代表运算或关系的记号，而非前一类代表数和量的元素的记号。正如一个符号的真正含义绝不取决于其特定形式或表达方式，决定其使用的规律亦然。然而在本文中，我们所处理的是书写符号，而“符号”一词将专就这些书写符号而言。符号的本质属性在以下定义中被列举。

定义。--记号是一种任意的标记，具有固定的解释，并且能够与其他记号相结合，服从依赖于它们相互解释的固定规律。

3. 让我们分别考察上述定义中所涉及的各个要点。(1.)首先，符号是一种任意的标记。我们为某一给定观念关联何种特定的词或标记，显然是无关紧要的，只要这种关联一经建立便保持恒定。罗马人用“civitas”一词来表达我们所称的“state”。但他们和我们同样完全可以采用任何其他词来代表同一概念。事实上，语言的本质中没有任何东西会阻止我们仅仅用一个字母来表达同样的含义。倘若如此，该字母所须遵循的使用规律，与拉丁语中“civitas”和英语中“state”的使用规律，至少在那些为一切语言所共有的普遍原则所支配的范围内，本质上将是相同的。

(2.)其次，每个符号必须在同一论述或推理过程的范围内具有固定的解释。这一条件的必要性是显而易见的，并且似乎植根于主题的本性之中。然而，关于在推理过程中用作名称的词或符号的代表职能的确切性质，存在着争论。有些人主张，它们仅代表心灵的概念；另一些人则主张，它们代表事物。这个问题在此并不十分重要，因为它的解决不可能影响符号使用所遵循的规律。不过我认为，对这个问题及诸如此类问题的一般回答是：在推理过程中，符号代替并

履行心灵的概念和心灵活动的职能；但由于那些概念和心灵活动代表事物以及事物的联系和关系，所以符号代表事物及其联系和关系；最后，由于符号代替心灵的概念和心灵活动，它们服从那些概念和心灵活动的规律。这一观点将在下一章中得到更充分的阐明；但在此它有助于解释符号定义中所涉及的第三个要点，即符号服从于依其解释的性质而定的固定组合规律。

4. 对那些借以进行推理活动的记号的分析与分类，将在下述命题中予以考虑：

命题一。

语言作为推理工具的一切活动，均可由由以下元素构成的记号系统来进行，即：

1. 字面记号，如 、 、等，表示作为我们概念之主词的事物。

2. 运算记号，如 + 、 、 ，代表那些心灵活动，通过它们，事物的概念被组合或分解，以形成包含相同元素的新概念。

3. 同一性的符号， = 。

而这些逻辑记号在其使用中服从确定的规律，这些规律部分地与代数学中相应记号的规律一致，部分地与之不同。

让我们设定以下原则作为理性话语之真正元素的判准：它们应当能够以最简单的形式和最简单的规律相结合，并且如此结合应当生成一切其他已知的和可设想的语言形式；采纳这一原则，让我们考虑以下分类。

第i类。

5. 称谓记号或描述记号，表达事物的名称，或属于该事物的某种性质或情况。

我们显然可以把实体性的专名或通名以及形容词归入这一类。确实，这些可以被认为仅仅在这一点上有所不同：前者表达其所指称的个体事物或诸事物的实体性存在；后者则蕴含那种存在。如果我们给形容词附加上普遍理解的主词“存在者”或“事物”，它实际上就变成了一个实体词，并且可以为推理的一切本质目的而由实体词来替代。说“水是一种流体的事物”与说“水是流体的”，在心灵的每一个特殊考虑方面是否相同，这至少在推理过程的表达中是等价的。

同样清楚的是，我们必须将任何可能按约定用于表达某种情况或关系的记号归入上述类别，对该情况或关系的详细阐述将涉及许多记号的使用。诗歌措辞中的修饰语非常频繁地属于此类。它们通常是

复合形容词，单独履行多词描述的职能。荷马的“深涡的大洋”在单个词 βαθυδίνης 中体现了一种实质的描述。而习惯上，任何其他面向想象或理智的描述同样可以用一个单一符号来代表，其使用在一切本质要点上将服从与形容词“好”或“大”的使用相同的规律。与主词“事物”相结合，这样一个符号实际上就变成了一个实体词；而通过一个单一的实体词，事物和性质两者的联合含义都可以被表达出来。

6. 现在，既然已经定义符号是任意的标记，那么允许用字母来替换上述种类的一切符号。那么让我们约定，用一个单一字母，如 x，来代表某个特定名称或描述所适用的个体类。例如，如果名称是“人”，就让 x 代表“所有人”，或类“人”。所谓类，通常指个体的集合，其中每一个体都可以被应用某个特定名称或描述；但在本著作中，该词项的含义将被扩展，以致包括只存在一个个体符合所需名称或描述的情形，以及由词项“无”和“宇宙”所表示的情形，这些作为“类”应被理解为分别包含“无存在者”、“一切存在者”。再者，如果一个形容词，如“好”，被用作描述的词项，让我们用一个字母，如 y，来代表“好”这一描述所适用的一切事物，即“一切好的事物”，或类“好的事物”。进一步约定，通过组合 xy 应代表由 x 和 y 所代表的名称或描述同时适用的那一类事物。因此，如果 x 单独代表“白的事物”，而 y 代表“羊”，就让 xy 代表“白的羊”；同样地，如果 z 代表“有角的事物”，而 x 和 y 保持其先前的解释，就让 zxy 代表“有角的白的羊”，即名称“羊”以及描述“白的”和“有角的”共同适用的那一集合的事物。

现在让我们考虑以上述意义使用的记号 x、y 等所服从的规律。

7. 首先，显而易见的是，按照上述组合方式，两个记号书写的顺序是无关紧要的。表达式 xy 和 yx 同样地代表那样一类事物，名称或描述 x 和 y 共同适用于该类事物的各个成员。因此我们有，

$$xy = yx. \tag{1}$$

在 x 代表白的事物、y 代表羊的情形下，此方程中任一成员都将代表“白的羊”这一类。在概念形成所依据的顺序上可能存在差异，但在其所统摄的个体事物方面则没有差异。同样地，如果 x 代表“河口”，而 y 代表“河流”，则表达式 xy 和 yx 将无差别地代表“是河口的河流”，或“是河流的河口”，此处的组合在普通语言中是两个实体词的组合，而非如前例中实体词与形容词的组合。

设有第三个记号，如 z，代表“可航行的”一词所适用的那类事物，则以下任一表达式，

$$zxy,\ zyx,\ xyz,\ \&\mathrm{c.},$$

将表示“可航行的、属于河口湾的河流”这一类。

如果其中一个描述性词项对另一个有某种隐含的指涉，只需将该指涉明确地包含在其陈述的意义中，即可使上述论述仍然适用。例如，如果 x 代表“智慧的”而 y 代表“顾问”，我们就必须界定 x 是意味着绝对意义上的智慧，还是仅指顾问的智慧。有了这样的定义，规律 xy = yx 继续有效。

因此，我们被允许使用记号 、 、 等，以代替受解释规则约束的实词、形容词和描述性短语，即任何将其中若干记号写在一起的表达式，应代表其各自含义共同适用的一切对象或个体；并且服从这样的规律：记号彼此相继的顺序是无关紧要的。

由于解释规则已被充分例示，我认为在定义用于形容词的记号的解释时，不必总是表达主词“事物”。当我说，令 x 代表“好的”时，应当理解为 x 仅当该性质的承担者由另一记号提供时才代表“好的”，而单独使用时，其解释将是“好的事物”。

8. 关于上述确定的规律，可以补充以下观察，这些观察对以后将要推演的某些其他规律也或多或少适用。

首先，我要指出，这条规律是一条思维规律，而非严格意义上的事物规律。一个对象的性质或属性在顺序上的差异，撇开一切因果关系问题不谈，仅仅是概念上的差异。这条规律(1)作为一条普遍真理表达的是，同一事物可以以不同方式被设想，并陈述了那种差异的性质；它不过如此而已。

其次，作为思维规律，它实际上在语言的规律中得到发展，语言是思维的产物和工具。尽管散文写作的趋势是趋于一致，然而即便在那里，含义绝对的、应用于同一主词的形容词的先后顺序也是无关紧要的，但诗歌的措辞借由将同样的合法自由也扩展到实体词而获得了其丰富多样的许多特色。弥尔顿的语言尤其以这种多样性而著称。实体词不仅常常先于限定它的形容词，而且常常被置于它们中间。在向光呼吁的最初几行中，我们就遇到如下这样的例子：

> “ 上天的长子。 ”
> “幽暗深邃的水域那升起的世界。”“明亮本质那未受
> 造的光辉流溢。 ”

现在，这些倒装的表达形式并非仅仅是诗的特许的产物。它们是思维的内在规律所认可的自由的天然表达，只是出于便利的考虑，在语言的日常使用中未被运用。

第三，(1)所表达的规律可以这样来描述：文字记号 x、y、z 是可交换的，如同代数学中的记号。这样说，并不是断言代数学中的乘法过程--其基本规律由方程

$$xy = yx,$$

所表达--本身与上面使 xy 所代表的逻辑结合过程有任何类比；而只是说，如果算术过程和逻辑过程以相同方式表达，它们的符号表达式将服从相同的形式规律。这种服从的证据在两种情形中是截然不同的。

9. 由于两个文字记号以 xy 形式的结合表达了 x 和 y 所代表的名称或性质共同适用的那一整类对象，由此推出，如果两个记号具有完全相同的意义，它们的结合所表达的并不比其中任一记号单独使用时更多。因此在这种情形下我们应有

$$xy = x.$$

然而，由于 y 被假定与 x 具有相同的意义，我们可以在上述方程中用 x 替换它，于是得到

$$xx = x.$$

现在在普通代数学中，组合 xx 被更简洁地表示为 x^2。让我们在此采用同样的记法原则；因为表达某一特定系列心灵活动的方式，本身与表达单一观念或活动的方式同样任意 (II.3)。按照这一记法，上述方程便采取如下形式

$$x^2 = x, \tag{2}$$

并且事实上，这就是那些用以符号化地代表名称、性质或描述的记号的第二条一般规律的表达式。

读者必须牢记，尽管在前述所构成的例子中，记号x和y被赋予了彼此不同的含义，但没有任何东西阻止我们赋予它们完全相同的含义。显然，它们的实际含义彼此越接近，由组合xy所表示的那类事物就越接近于与x所表示的类以及y所表示的类同一。方程(2)的证明中所设的情形正是absolute含义同一的情形。它所表达的那条规律在语言中得到了实际的例证。就任何主词而言，说“好，好”，虽然是一种累赘

而无用的赘语，却等同于说“好”。因此，“好，好”的人，等价于“好”的人。这种词的重复确实有时被用来提高一种性质或加强一个肯定。但这种结果仅仅是次要的和约定俗成的；它并非建立在语言和思维的内在关系之上。我们在自然界中所观察到或我们自己所作的大多数操作，都属于这样一种：其结果因重复而增强，这一情况使我们预期语言中也有同样的事情，甚至当我们打算强调地说话时就使用重复。但无论在严格的推理中还是在精确的论述中，这种做法都没有任何正当的依据。

10. 我们现在转而考察言语记号中的另一类，以及与它们的使用相关的规律。

第二类。

11. 那些心灵活动的记号，我们借以将部分集合为整体，或将整体分解为部分。

我们不仅能够持有关于对象的概念--这些对象以适用于所考察的群体中每个个体的名称、性质或情况为特征--而且能够形成关于一个由部分群体组成的对象群体的聚合概念，其中每个部分群体都被单独命名或描述。为此我们使用连词“和”、“或”等。“树和矿物”、“荒山或沃谷”，就是这类例子。严格说来，置于描述两个或更多类对象的项之间的“和”、“或”这两个词，意味着那些类是完全有别的，以致于一个类中没有成员出现在另一个类中。在这方面以及在所有其他方面，“和”“或”这两个词与代数中的符号+类似，它们的规律是相同的。因此，“男人和女人”这一表达式，撇开约定含义不谈，等价于“女人和男人”这一表达式。设x表示“男人”,y表示“女人”；并设+代表“和”以及“或”，于是我们有

$$x + y = y + x, \tag{3}$$

一个方程，如果x和y表示数，且+是算术加法的记号，它也同样成立。

令记号z代表形容词“欧洲的”，那么，由于说“欧洲的男人和女人”与说“欧洲的男人和欧洲的女人”实际上是一回事，我们有

$$z\,(x + y) = zx + zy. \tag{4}$$

如果x、y和z是数的记号，并且两个文字记号的并置代表它们的代数乘积，正如在先前给出的逻辑意义中，它代表两个相连形容词所属对象的类，那么这个方程也同样成立。

以上是支配记号+使用的规律，此处用它表示将部分聚合为整体的肯定活动。但正是

关于一种实现某种肯定性改变的操作的观念，似乎向我们暗示出一种相反或否定的操作观念，其结果是撤销前一种操作所做之事。因此，我们不可能设想把部分集合成一个整体，而不也设想把部分从整体中分离出来。这一操作我们在日常语言中用符号“除.....之外”来表达，例如，“所有人除亚洲人之外”,“所有国家除君主制国家之外”。这里隐含的是，被排除的事物构成它们所从被排除的那些事物的一部分。正如我们用符号+表达了聚合的操作，我们也可以用–减来表达上述否定的操作。因此，若取x表示人，y表示亚洲人，即亚洲的人，那么“所有人除亚洲人之外”这一概念将由x – y来表达。而若我们用x表示“国家”，用y表示描述性性质“具有君主制的形式”，那么“所有国家除君主制国家之外”这一概念将由x – xy来表达。

正如在言语顺序中，我们将例外情况放在前面或后面表达，对于推理的一切本质目的而言都无关紧要，同样，我们书写任何一系列项的顺序也无关紧要，其中一些项受到记号–的影响。因此，正如在普通代数中，我们有

$$x - y = -y + x. \tag{5}$$

仍以x表示“人”这个类，以y表示“亚洲人”，令z代表形容词“白的”。现在，将形容词“白的”应用于由短语“除亚洲人以外的人”所表达的人的集合，等同于说“白人，除白种亚洲人以外”。因此我们有

$$z\,(x - y) = zx - zy. \tag{6}$$

这也符合普通代数的规律。

方程(4)和(6)可以被视为一条单一普遍规律的例证，这条规律可以这样陈述，即文字记号，，，等在其运算中是分配性的。这条规律所表达的一般事实是这样的，即：如果任何一种性质或情况被赋予一个群体的所有成员，而这个群体是通过部分群体的聚合或排除而形成的，那么所得出的概念就与先把该性质或情况赋予各部分群体的每个成员、然后再进行聚合或排除所得的概念相同。被赋予整体之成员的东西，被赋予其所有部分的成员，无论那些部分如何联结在一起。

第三类。

12. 关系借以表达、并借以构成命题的符号。虽然一切动词都可恰当地归入此类，但为逻辑的目的，只需考虑它仅包含实体动词 is 或*are*，因为其他一切动词都可分解为此元素以及第一类所含符号之一。既然这些符号用于表达各种性质或情况，它们便可用来表达动词主词的主动或

被动关系，而不论所考虑的是过去、现在还是将来的时间。例如命题“Cæsar conquered the Gauls”可分解为“Cæsar is he who conquered the Gauls”。我认为这一分析的根据如下：--除非我们理解“having conquered the Gauls”即“One who conquered the Gauls”这一表达所意指的东西，我们就不能理解所讨论的句子。因此它确实是该句的一个元素；另一个元素是“Cæsar”，此外还需要一个元素，即系词*is*，以表明这两者的联系。然而我并不断言，除了上述方式之外，就没有别的方式可以考察命题“Cæsar conquered the Gauls”所表达的关系；我只是说，就所采取的特定观点而言，这里给出的分析是正确的，并且它足以满足逻辑演绎的目的。可以指出，希腊语的被动分词和将来分词暗示了已断言的原则的存在，即：符号*is*或*are*可被视为每个人称动词的一个元素。

13.上述记号，是或是可以用符号=来表示。接下来要考虑的是该符号所引入的规律，或者通常所说的公理。

让我们取命题“星辰是太阳和行星”，并以x表示星辰，以y表示太阳，以z表示行星；于是我们有

$$x = y + z. \tag{7}$$

现在，如果星辰是太阳和行星为真，那么由此可得，除行星以外的星辰是太阳。这将给出方程

$$x - z = y, \tag{8}$$

因此这必定是从(7)演绎出来的。这样，项z通过改变符号从方程的一边移到了另一边。这与代数的移项规则一致。但与其详述个别情况，我们可以直接断言一般公理：-

第一，若相等之物加于相等之物，则整体相等。

2. 若从相等之物中取去相等之物，则余下者相等。由此看来，我们可以加减方程，并像在普通代数中那样运用上述移项规则。再者：若两类事物 x 与 y 同一，即若一类的所有成员都是另一类的成员，则一类中具有给定性质 z 的那些成员，将与另一类中具有同一性质 z 的那些成员同一。因此，若我们有方程

$$x = y;$$

那么无论 z 可能代表什么类别或属性，我们也有

$$zx = zy.$$

这在形式上与代数定律相同：--若方程的两边同乘以同一量，则乘积相等。

以同样的方式可以表明，若将两个方程的对应边相乘，所得方程亦为真。

14. 然而，现行系统与通常所陈述的代数系统之间的类比，似乎到此为止。假定某一类x中具有某种性质z的那些成员，与某一类y中具有同一性质z的那些成员是同一的，并不能由此推出类x的成员普遍地与类y的成员是同一的。因此，不能从方程

$$zx = zy,$$

该方程

$$x = y$$

也是真的。换言之，代数学家的公理，即方程两边可以除以同一个量，在这里没有形式上的等价物。我说没有形式上的等价物，是因为按照这些探究的一般精神，甚至并不试图确定，从一个组合 zx 中移除一个逻辑记号 z 所代表的心理操作，本身是否与算术中的除法操作类似。那个心理操作确实与通常所称的抽象是同一回事，并且下文将表明，它的规律依赖于本章已经推导出的规律。现在所表明的是，在这些规律之中，不存在任何在形式上与一个通常接受的代数公理类似的东西。

但稍加考虑就会表明，即使在普通代数中，那条公理也不具备已经考虑过的那些其他公理的那种普遍性。从方程 $zx = zy$ 推出方程 $x = y$，只有在已知 z 不等于0时才有效。那么，如果假定值 $z = 0$在代数体系中是可容许的，上述公理就不再适用，而前面所例示的类比至少仍然未被打破。

15. 然而，追踪这类亲缘关系，除了作为思辨之事以外，对于一般的量之记号并无任何重要性。我们已看到(II.9)，逻辑的记号服从于特殊的规律，

$$x^2 = x.$$

现在，数的符号只有两个，即0和1，它们服从相同的形式规律。我们知道$0^2 = 0$，且$1^2 = 1$；而方程 $x^2 = x$，作为代数的方程来看，除0和1之外没有别的根。因此，与其一般地确定逻辑的记号与数的记号之间形式一致的程度，不如更直接地提示我们，将它们与只容许取值0 和1的量的符号相比较。那么，让我们设想一种代数，其中的记号 x、y、z 等等。

可无差别地取0和1这两个值，且仅取这两个值。这样一种代数的规律、公理和过程，在其全部范围内，将与逻辑代数的规律、公理和过程完全相同。唯有解释的不同才会将它们区分开来。本书的方法即建立于此原则之上。

16. 现在尚需表明，普通语言中那些在本章前几节未曾考察的组成部分，要么可以分解为与那些已被考察的部分相同的元素，要么从属于那些元素，有助于对它们作出更精确的定义。

名词、形容词和动词，连同虚词和、除.....之外，我们已经考虑过了。代词可以被视为名词或形容词的一种特殊形式。副词修饰动词的意义，但不影响其性质。介词有助于表达情况或关系，从而倾向于使字面记号的意义更加精确和详细。连词如果、要么、或者，主要用于表达命题之间的关系，并且下文将表明，同样的关系可以完全由解释上类似、在形式和规律上与本章已解释其用法和意义的记号相同的初等记号来表达。至于言语的任何其余要素，经考察就会发现，它们要么用于给论说的项以更确定的含义，从而进入已经考虑过的字面记号的解释，要么用于表达伴随命题说出时的某种情绪或感情状态，从而不属于知性的领域，而我们的关注仅在于知性。对其使用的经验将证明所采用的分类是充分的。

第三章

从人类心灵活动的规律推导逻辑记号之规律。

1. 真正所谓的科学，其对象是关于规律和关系的知识。能够把对这一目的而言本质的东西，与只是偶然与之相关联的东西区分开来，是科学进步最重要的条件之一。我说区分这些要素，是因为对科学的一贯献身并不要求把注意力完全从其他思辨中撤回，这些思辨往往是形而上学性质的，而科学并非不常与它们相关联。例如，诸如现象是否存在一个支撑性的根据、原因是否真实、暗示事物的相继状态由操作相联系的言语形式是否恰当等问题，以及诸如此类的问题，可能对科学具有深切的兴趣和意义，而本身并不本质上是科学的。确实，要表达自然科学的结论，几乎不可能不借用这些概念的语言。由此也未必产生任何实际的不便。那些相信在因果关系中不止有一种不变的相继秩序的人，和那些拒绝相信这一点的人，在对物理天文学结论的解释上是一致的。但他们之所以一致，只是因为他们承认一种共同的科学真理要素，这种要素独立于他们对因果性本质的特殊看法。

2.如果这一区分在物理科学中是重要的，那么在涉及理智能力的科学中就更值得注意。因为这门科学所提出的问题，至少在表述上，几乎必然与那些带有形而上学起源印记的思维方式和语言混杂在一起。唯心主义者会给予推理规律一种表述形式；怀疑论者，如果忠于其原则，则会给予另一种。那些将我们在本探究中所关注的现象视为思维主体的纯粹相继状态、不具任何因果联系的人，与那些将这些现象归因于能动理智的活动的人，如果前后一致，同样会在其陈述方式上产生分歧。类似的差异也会因对心智能力的分类不同而产生。现在，

我在此所要主张的原则，作为在如此多表面与真实的分歧之中给予我们信心与稳定性的唯一根据，如下，即：如果所讨论的规律确实是从观察中推导出来的，那么它们作为人类心灵的规律具有真实的存在，独立于其陈述方式中可能似乎涉及的任何形而上学理论。它们包含着一个真理的元素，任何对心灵活动的性质、甚至对其实在性的进一步批评，都不能在本质上影响这个元素。即便承认心灵只不过是一系列意识状态的相继，一系列既非来自外部亦非来自内部的、无原因的短暂印象，从无中涌现又复归于无--这是怀疑论理智的最后精炼--然而，作为相继的规律，或至少是过去相继的规律，观察所导致的结果仍将保持为真。它们将需要被翻译成一种语言，从其词汇中所有诸如原因与结果、活动与主体、实体与属性这样的术语都已被清除；但它们作为科学真理仍将有效。

此外，由于任何基于实际观察的思维规律的陈述都必然包含独立于关于心灵性质的形而上学理论的科学元素，这些元素对构建推理体系或方法的实际应用也必然独立于形而上学区分。因为任何实际应用都将立足于规律陈述中所涉及的科学元素，正如物理天文学的实际结论独立于任何关于引力原因的理论，而仅立足于对其现象结果的知识。因此，就思维规律的确定以及发现后对它们的实际运用而言，对于一切真正科学的目的，我们都不关心任何形而上学思辨的真假。

3.在这种情况下，我认为适宜采取的做法是尽可能利用日常话语的语言，而不顾及它可能被认为体现了何种关于心灵性质与能力的理论。例如，按照通常用法，我们说我们通过交流观念或概念而彼此交谈，这种交流是词语的职能；并且，相对于呈现给它的任何特定观念或概念，心灵具有某些能力或功能，借此心理关注可以固定于某些观念而排除其他观念，或者借此给定的概念或观念可以以各种方式组合在一起。这些功能或能力被赋予了不同的名称，如注意、简单领会、概念或想象、抽象等--这些名称不仅构成了人类心灵哲学不同分支的标题，而且进入了人们的日常语言。因此，每当有机会使用这些术语时，我将如此使用，而不因此暗示我接受心灵拥有这样一些能力和功能作为其活动的不同元素的理论。而且，确实没有必要探究这些知性能力是否具有独立的存在。我们可以将这些不同的名称归入一个属名，即活动--

人类心灵，就本书目的所必需的范围而言，对这些活动作出界定，然后寻求表达它们的终极规律。这将是我所要遵循的一般进程次序，尽管偶尔会提及共同约定赋予那些可能落入我们注意范围的特定心灵状态或活动的名称。

将以下研究较为确定的结果分列为各个命题，将最为便利。

命题一。

4. 从严格使用语言作为推理工具时所隐含的那些心灵活动的考察中，推导逻辑记号的规律。

在一切话语中，无论是心灵与自身思想的交谈，还是个人与他人的交往，都存在一个被假定或表达的界限，话语运作的主词被限制于其中。最无拘束的话语是其中我们使用的词语在尽可能最广泛的应用中被理解，而对话语而言，其界限与宇宙本身的界限同延。但更通常地，我们将自己限制在一个不那么广阔的范围之内。有时，在谈论人时，我们暗示(而未表达这一限制)我们只谈论在某些境况和条件下的人，如文明人，或处于生命旺盛期的人，或处于某种其他状况或关系中的人。那么，无论我们话语的一切对象所存在于其中的范围有多大，那个范围都可以恰当地被称为论域。

5. 此外，这个论域在最严格的意义上是话语的终极主词。在假定限制下所使用的任何名称或描述性项，其职责不是在心灵中唤起该名称或描述所适用的所有存在者或对象的概念，而只是唤起那些存在于所设论域之内的存在者或对象的概念。如果那个论域是事物的实际宇宙--当我们的语词在其真实和字面的意义上被理解时，它总是如此--那么“人”意指所有存在的人；但如果论域被任何先行的隐含理解所限制，那么我们所说的就是在此引入的限制之下的人。在两种情况下，“人”这个词的任务都是引导某种心灵活动，借此从适当的论域中选取或确定所指称的个体。

6. 形容词的使用所隐含的心灵活动恰恰属于同一种类。例如，设论域为实际的宇宙。那么，正如人这个词引导我们从那个宇宙中在心灵上选取“人”这个项所适用的一切存在者；同样，“善”这个形容词在“善人”这个组合中进一步引导我们从人这个类中在心灵上选取所有具有进一步性质“善”的那些人；如果再有一个形容词被加在“善人”这个组合之前，它就会引导一种相同性质的进一步活动，关涉到它可能被选择来表达的那种进一步的性质。

仔细注意此处所描述的活动之真正性质是重要的，因为可以设想，它本可能不同于其实际所是。如果形容词在其性质上仅仅是归属性的，那么看来，当某一特定的一群存在者被人所指称时，加上形容词善就会引导我们在心灵上把善的性质附加到所有那些人身上。但这不是形容词的真正职责。我们真正执行的活动是按照一个规定的原则或观念进行选取。按照公认的心灵能力分类，这样一种活动应归于何种能力，探究它并不重要，但我设想它会被认为依赖于概念或想象与注意这两种能力。其中之一可以被归于一般概念的形成；另一种则被归于将心灵的目光固定于规定论域之内那些符合该概念的个人身上。然而，如果--这似乎并非不可能--注意的能力不过是继续运用心灵任何其他能力的能力，那么我们完全可以认为上述整个心灵过程应归于想象或概念的心灵能力，该过程的第一步是论域本身的概念，而每一个后续步骤都以确定的方式限制如此形成的概念。采取这一观点，我将把每一个这样的步骤，或任何确定的此类步骤的组合，描述为一个确定的概念活动。而我将扩展这个术语的使用，使其含义不仅包括由特定名称或性质的简单属性所代表的各类对象的概念，而且包括这些概念以任何与人类心灵的能力和限制相一致的方式的组合；实际上，包括任何不及句子或命题结构所涉及的那种程度的理智活动。此类心灵活动所服从的一般规律现在将要加以考察。

7. 现在将要表明，前一章中`*a posteriori*从语言的构造为逻辑的字面记号的使用所确定的那些规律，实际上是刚刚所描述的那种确定的心灵活动的规律。我们以关于其主词之界限的某种理解，即关于其论域之界限的某种理解，来开始我们的论述。我们所使用的每一个名称、每一个描述性项，都引导我们对其说话的人在那个主词上执行某种心灵活动。思想就是这样被传达的。但既然从这一观点看，每个名称或描述性项都只是某种理智活动的代表，而那种活动在自然秩序中也是在先的，那么显然，名称或记号的规律必定具有派生的性质--事实上必定起源于它们所代表的那种活动的规律。记号的规律与心灵过程的规律在表达上是同一的，这一点现在将要表明。

8. 那么，让我们假定我们论域的全域是实际的全域，从而词语应在其意义的全部范围内使用，并让我们考察“white”和“men”这两个词所隐含的两种心灵活动。“men”一词隐含了在思想中从其主词即全域中选取一切人的活动；而由此产生的概念，*men*，便成为

下一个活动的主词。“白”这个词所隐含的活动是从其主词“人”中选取属于该类的所有白的个体。最终得到的概念是“白人”的概念。现在十分明显，如果上述活动以相反的顺序进行，结果也会相同。无论我们是先形成“人”的概念，然后通过第二次理智活动将该概念限制为“白人”，还是先形成“白物”的概念，然后将其限制为该类中那些是“人”的个体，就结果而言都完全无关紧要。显然，如果我们用任何其他描述性或称谓性的项来替换“白”和“人”这两个词，只要它们的含义是固定和绝对的，心灵过程的顺序同样无关紧要。因此，概念能力的两个相继活动的顺序的无关紧要性--其中一个活动提供另一个活动被假定在其上运作的主词--是该能力之运用的一个一般条件。它是心灵的一条规律，并且它是逻辑字面记号的那条构成其形式表达的规律的真正起源。

(1) 第二章

9. 同样清楚的是，上述心灵活动具有这样的性质：其结果不因重复而改变。假定通过一次确定的概念活动，注意力已固定于“人”之上，又通过同一能力的另一次运用，我们将其限制于这一种族中那些白的人。那么，对后一心灵活动的任何进一步重复--即把注意力限制于白的对象--都丝毫不会改变所达到的概念，即白的人的概念。这也是心灵的一条普遍规律的例证，并且它在字面记号的法律((2) 第二章)中具有其形式表达。

10. 再者，显然从两个不同事物类的概念，我们可以形成由这两个类合在一起所构成的那一事物集合的概念；而这两个类以何种位置次序或优先次序呈现于心灵视野，显然是无关紧要的。这是心灵的又一条一般规律，其表达式见于(3)第二章。

11. 不必继续这一探究与比较的进程。已给出充分的说明，使以下两个论点得以显明，即：

第一，心灵的活动--在运用其想象力或概念能力时，它组合并改变事物或性质的简单观念，这些活动不亚于那些施用于真理和命题的理性活动--服从普遍规律。第二，那些规律在形式上是数学的，并且它们实际上是在人类语言的本质规律中被展开的。因此，逻辑的记号的法律可以从对推理中心灵活动的考察中推导出来。

12. 本章余下的部分将用于讨论与那条思维规律相关的问题，该规律的表达式为$x^2 = x$(II.9)，正如已隐含指出的(II.15)，这条规律构成了心灵在其日常言说与推理中的活动，与心灵从事一般量之代数时的活动相比，所具有的特征性区别。以下探究的一个重要部分将在于

证明记号0和1在逻辑的记号中占有一席之地，并且可以接受一种解释；或许首先有必要表明，诸如上述那样的特殊记号，如何可以恰当而有利地用于表示不同的思想系统。

这种恰当性的根据不可能在于任何解释的共同性。因为在像逻辑和算术(我使用后一术语在其最广的意义上，即数的科学)那样真正不同的思想体系中，严格说来，并没有主词的共同性。其中一个与事物的概念本身打交道，另一个则仅仅考虑它们的数值关系。但是，既然任何推理体系的形式和方法直接取决于记号所服从的规律，并且只是间接地、通过上述联系环节，取决于它们的解释，那么在不同的思想体系中采用相同的记号就可能既有恰当性又有益处，只要能够赋予它们这样的解释，使得它们的形式规律相同，并且它们的使用一致。那么，这种采用的根据将不是解释的共同性，而是形式规律的共同性，在它们各自的体系中它们服从这些规律。也不得根据任何其他理由来确立这种形式规律的共同性，而只能根据对所考察的体系的解释中独立地产生出来的那些结果进行仔细的观察和比较。

这些观察将解释以下命题中所采用的探究过程。逻辑的字面记号普遍服从其表达为 $x^2 = x$ 的规律。在数的记号中，只有两个，0 和 1，满足这一规律。但是，这些记号中的每一个在数值量体系中还服从一个为其自身所特有的规律，这提示了这样的探究：必须赋予逻辑的字面记号以什么解释，以便同样的特有形式和形式规律也能在逻辑体系中实现。

命题 II

13. 确定记号 0 和 1 的逻辑价值与意义。记号0，如代数中所用，满足以下形式规律，

$$0 \times y = 0, \text{ or } 0y = 0, \tag{1}$$

无论数 y 可能代表什么。为了使这一形式规律在逻辑体系中得到遵守，我们必须赋予记号 0 这样的解释，使得由 0 y 所代表的类与由 0 所代表的类相同，无论类 y 可能是什么。稍加思考就会表明，如果记号 0 代表无，则这一条件得到满足。按照先前的定义，我们可以把无称为一个类。事实上，无和宇宙是类外延的两个极限，因为它们是普通名称的可能解释的极限，其中没有一个能关涉少于无中所包含的个体，或多于宇宙中所包含的个体。

现在，无论类y可能是什么，它与类“Nothing”所共有的个体，与包含在类“Nothing”中的那些个体是同一的，因为它们一个也没有。于是，通过赋予0以Nothing这一解释，规律(1)得到满足；而若要与类y的完全一般的性质相一致，它便不能以别的方式得到满足。

Secondly, The symbol 1 satisfies in the system of Number the following law, viz.,

$$1 \times y = y, \text{ or } 1y = y,$$

无论数y可能代表什么。并且，这个形式方程在本著作的系统中被假定为同样有效，其中1和y代表类，看来符号1必须代表这样一个类，即凡在任何提出的类y中发现的一切个体，也都是那个类y与由1所代表的类所共有的全部个体1y。稍加思考即可表明，由1所代表的类必须是“论域”，因为这是在其中发现存在于任何类中的全部个体的唯一一个类。因此，符号0和1在逻辑系统中的各自解释是无和论域。

14. 正如随着任何一类对象如“men”的观念，心灵中便浮现出与之相反的、不是人的存在者之类的观念；又正如整个全域是由这两个类合在一起构成的，因为对于它所包含的每一个个体，我们都可以断言它是一个人，或者断言它不是一个人，因此，探究这类相反的名称应如何表达，便变得重要起来。这便是以下命题的目的。

命题三。

若表示任何一类对象，则 1 − x 将表示与之相反或补充的对象类，即包括一切未被包含在类中的对象的类。

为了概念更加清晰，让x代表人类这个类，并且按照上一个命题，我们用1来表示论域；现在，如果从由“人”和“非人”组成的论域概念中排除“人”的概念，那么得到的概念就是相反的类，“非人”。因此，“非人”这个类将由1−x来表示。并且，一般来说，无论符号x代表哪一类对象，相反的类都将由1−x来表示。

15. 尽管以下命题严格说来属于本书后面论述准则或必然真理的那一章，然而，鉴于它所涉及的那条思维规律极为重要，此处引入它被认为是恰当的。

命题四。

形而上学家称之为矛盾律的那条公理，它断言任何存在者不可能具有一种性质同时又不同时具有它，乃是思维基本规律的一个推论，该规律的表达式为 $x^2 = x$ 。

让我们把这个方程写成如下形式

$$x - x^2 = 0,$$

由此我们得到 have

$$x\,(1-x) = 0; \tag{1}$$

这两个变换都由组合与换位的公理定律(II.13)证明为正当。为了概念的简单性，让我们给符号x以人这一特定解释，那么1–x将代表“非人”这个类(命题III)。现在，两个类的表达式的形式乘积代表它们二者所共有的那个个体类(II.6)。因此，x(1–x)将代表其成员同时是“人”和“非人”的那个类，而方程(1)因此表达了这一原理：一个其成员同时是人和非人的类并不存在。换言之，同一个个体不可能同时既是人又不是人。现在，让符号x的意义从代表“人”扩展到代表任何以具有某种性质为特征的存在物的类；于是方程(1)将表达：一个存在物不可能同时具有一种性质又不具有那种性质。但这恰恰就是亚里士多德所描述为一切哲学之基本公理的“矛盾原理”。“同一性质不可能既属于又不属于同一事物.....这是一切原理中最确定的.....因此，进行证明的人把它当作最终的意见来诉诸。因为它在本性上就是其他一切公理的根源。”[1]

上述解释之所以引入，并不是因为它在当前系统中具有直接价值，而是作为理智能力哲学中一个有意义事实的例证，即：通常被视为形而上学基本公理的东西，只不过是一条思维规律的结果，而这条规律在形式上是数学的。我还希望提请注意这一情况：表达那条思维基本规律的方程(1)是一个二次方程。[2]不作推测

1Τὸ γὰρ αὐτὸ ἅμα ὑπάρχειν τε καὶ μὴ ὑπάρχειν ἀδύνατον τ˜ψ αὐτ˜ψ καὶ κατὰ τὸ αὐτό...Αὕτη δὴ πασνῶν ἐστὶ βεβαιοτάτη τῶν ἀρχῶν...Διὸ πάντες οἱ ἀποδεικνύντες εἰς ταύτην ἀνάγουσιν ἐσχάτην δόξαν˙ φύσει γὰρ ἀρξὴ καὶ τῶν ἄλλων ἀξεωμάτων αὕτη πάντων.-Metaphysica, III, 3. 2如果这里有人说，方程x2 = x的存在也必然导致方程x3 = x的存在，而后者是三次方程，然后追问该方程是否指示一个三分过程；回答是，方程x3 = x在逻辑系统中不可解释。因为把它写成以下两种形式之一

$$\begin{aligned} x\,(1-x)\,(1+x) &= 0, & (2)\\ x\,(1-x)\,(-1-x) &= 0, & (3) \end{aligned}$$

我们看到，它的解释，如果终究可能的话，必定涉及因子1 + x的解释，或因子– 1 – x的解释。前者不可解释，因为我们无法设想将任何类x加到全集1上；后者不可解释，因为记号– 1不服从定律x(1 – x) = 0，而所有类记号都服从该定律。因此方程x ^{3} = x不容有类似于方程x ^{2} = x的解释。然而，如果前一方程独立于后一方程而为真，也就是说，如果那种心灵活动

在本章中完全取决于这样一个问题，即那种情况在其本性上是否是必要的，那么我们可以冒昧地断言，如果它不曾存在，知性的整个程序就会与现在不同。因此，思维的基本方程是二次的这一事实的一个后果是，我们通过划分为成对的对立面，或者按术语所说，通过二分法，来进行分析和分类的操作。现在，如果所讨论的方程是三次的，仍然容许作为这样的解释，那么心理的划分在性质上必定是三重的，我们就必定通过一种三分法来进行，其真实性质对于我们凭借现有的能力来说是不可能充分设想的，但我们仍然可以将其规律作为理智思辨的对象来研究。

16. 由方程(1)所表达的思维规律，由于上述讨论已使之显明的理由，将偶尔被称为“对偶律”。

由记号x表示，使得它的第二次重复应当再现一次操作的结果，但不是其第一次或仅仅一次重复的结果，那么可以推定，我们应当能够解释形式(1)、(2)之一，而在思维的实际条件下我们不能这样做。存在着数学家所知道的某些操作，其规律可以由方程$x^3 = x$充分表达。但它们具有一种与一般推理的领域完全无关的性质。

在说思维规律可以设想为不同于其实际所是时，我仅仅是指我们能够构造这样一个假说，并研究其后果。这样做的可能性并不包含这样的学说，即人类理性的实际规律是偶然或任意意志的产物。

第四章

论命题划分为“初级”与

“次级的；”特征
这些类的性质，以及初级命题之表达式的规律。

1. 在研究了那些与概念或想象过程有关的心灵操作的规律，并解释了表示它们的记号的相应规律之后，我们被引导去考虑所获得结果的实际应用：首先，在命题的复杂项的表达中；其次，在命题的表达中；最后，在演绎分析的一般方法的构造中。在本章中，我们将主要关注这些对象中的第一个，作为它的导论，有必要建立以下命题：

命题一。

一切逻辑命题都可以被认为属于两个大类之一，这两个大类可分别命名为“初级”或“具体命题”，以及“次级”或“抽象命题”。

我们所做的每一个断言都可以归入以下两种之一。它要么表达事物之间的关系，要么表达--或等价于表达--命题之间的关系。关于事物的属性、或它们所显现的现象、或它们所处的情况的断言，确切地说，是关于事物之间关系的断言。说“雪是白的”，就逻辑的目的而言，等价于说“雪是一种白的东西”。关于事实或事件、它们的相互联系和依赖的断言，就同样的目的而言，通常等价于这样的断言：关于那些事件的如此这般的命题，就它们相互的真或假而言，彼此具有某种关系。前一类命题，涉及事物，我称之为“初级的”；后一类命题，涉及命题，我称之为“次级的”。

这一区分在实践上几乎但不完全与通常逻辑上命题分为直言命题与假言命题的区分相重合。

例如，“太阳照耀”、“大地变暖”是初级命题；“如果太阳照耀，那么大地变暖”是次级命题。说“太阳照耀”，就是说“太阳是那个照耀的东西”，它表达了两类事物之间的关系，即“太阳”与“照耀的东西”之间的关系。然而，上面给出的次级命题表达的是两个初级命题“太阳照耀”和“大地变暖”之间的依赖关系。我在此并不断言这些命题之间的关系就像它们所表达的事实之间的关系那样是一种因果关系，而只是说，命题之间的关系如此蕴涵着事实之间的关系、并且如此被事实之间的关系所蕴涵，以至于为了逻辑的目的，它可以被用作那种关系的合适代表。

2. 如果我们不说“The sun shines”这个命题，而说“It is true that the sun shines”，那么我们便不是直接谈论事物，而是谈论一个关于事物的命题，即“The sun shines”这个命题。因此，我们如此言说的命题是一个次级命题。每一个初级命题都可以由此产生一个次级命题，即那个断言其真或宣布其假的次级命题。

通常会出现这样的情况：虚词*if*、*either*、*or*会指示一个命题是次级命题；但它们并不必然意味着情况就是如此。“动物要么是理性的要么是非理性的”这个命题是初级命题。它不能分解为“要么动物是理性的，要么动物是非理性的”，因此它并不表达后一个析取句中连接在一起的两个命题之间的依赖关系。虚词*either*、*or*实际上并不是命题性质的标准，尽管它们更频繁地出现在次级命题中。甚至连词*if*也可能出现在初级命题中。“人如果明智，那么就是节制的”就是这类例子。它不能分解为“如果所有人都是明智的，那么所有人都是节制的”。

3. 由于我的目的并非讨论命题的通常划分的优劣，我在此只需说明：当前分类所依据的原则在其应用中清晰而明确，它涉及命题中一种真实而根本的区别，并且对于一种一般推理方法的发展具有本质的重要性。初级命题可以被置入一种形式而成为次级命题这一事实，也完全不与这里所主张的观点相冲突。因为在如此设想的情形中，被考虑的并不是初级命题中连接在一起的事物本身的任何直接说明，而只是命题本身被看作真或看作假。

4. 在初级命题与次级命题的表达中，本书将使用相同的记号，它们如将要表明的那样，服从相同的规律。两种情形之间的差别不是形式上的差别，而是解释上的差别。在两种情形中，命题所要表达的实际关系都将用符号=来表示。在初级命题的表达中，如此联结起来的各项通常将表示

命题的“项”，或者更具体地称之为命题的主词和谓词。

命题二。

5. 推导出一种一般方法，其基础在于列举可能的各种变体，用以表达任何类或事物的集合，而这类或集合可以构成一个特称命题的*“项”*。

首先，如果要表达的类或事物集合仅仅由该集合中所有个体共有的名称或性质来定义，那么它的表达将只包含一个项，其中表达那些名称或性质的记号将不带任何连接符号地组合在一起，如同代数的乘法过程一样。因此，如果x表示不透明物质，y表示抛光物质，z表示石头，我们就会有，

xyz = 不透明抛光石；

xy(1 – z) = 不透明的抛光物质，它们不是石头；x(1 – y)(1 – z) = 不透明物质，它们不是抛光的，并且不是石头；

对于任何其他组合也是如此。请注意，这些表达中的每一个都满足与其所包含的各个记号相同的对偶律。因此，

$$xyz \times xyz = xyz;$$
$$xy(1-z) \times xy(1-z) = xy(1-z);$$

如此等等。任何如上所述的项，我们将称之为“类项”，因为它通过该类中各个成员的共同性质或名称来表达一个事物的类。

其次，如果我们谈论的是事物的一个集合，其不同部分由不同的性质、名称或属性来定义，那么那些不同部分的表达式必须分别形成，然后用符号+连接起来。但是，如果我们想要谈论的那个集合是通过从某个更广泛的集合中排除其成员的一个确定部分而形成的，那么符号–必须加在被排除部分的符号表达式之前。关于这些符号的使用，还可以补充一些进一步的观察。

6. 一般地说，符号+等价于连词“and”、“or”，而符号–等价于介词“except”。在连词“and”和“or”中，前者通常用于所要描述的集合构成命题的主词时，后者用于它构成命题的谓词时。“学者*and*世故之人欲求幸福”可以作为其中一种情形的例证。“具有效用的事物*either*产生快乐*or*防止痛苦”可以例示另一种情形。现在，每当一个涉及这些虚词的表达式

当它出现在一个主词命题中时，了解它们在思想中所分离的群或类是否被意图为彼此完全区别且相互排斥，就变得非常重要。“学者和世俗之人”这一表达，是包括还是排除那些两者兼有的人?“要么产生快乐，要么防止痛苦”这一表达，是包括还是排除同时具有这两种性质的事物?我认为，在严格的意义上，连词“和”、“或”确实具有这里所指的分离或排除的力量；公式“所有 x 要么是 y 要么是 z”，严格解释为，“所有 x 要么是 y，但不是 z”，或者，“z 但不是 y”。但必须同时承认，“jus et norma loquendi”似乎更倾向于相反的解释。“要么 y 要么 z”这一表达，通常会被理解为包括同时是 y 和 z 的事物，以及属于其一但不属于另一的事物。然而，记住记号 + 确实具有所讨论的分离力量，我们必须将任何可能出现在我们面前的析取表达分解为在思想中真正分离的元素，然后用记号 + 连接它们各自的表达。

因此，根据所隐含的意义，表达式“要么是x要么是y的事物”将有两种不同的符号等价物。如果我们的意思是“是x但不是y的事物，或者是y但不是x的事物”，那么表达式将是

$$x(1-y)+y(1-x);$$

记号x代表x,y代表y。然而，如果我们的意思是“要么是x的事物，或者，如果不是x，那么是y的事物”，那么表达式将是

$$x+y(1-x).$$

这个表达式假定同时既是x又是y的事物是可容许的。它可以更完整地表达为以下形式

$$xy+x(1-y)+y(1-x);$$

但这个表达式在将前两项相加之后，仅仅重现了前一个表达式。

请注意，上面给出的表达式满足对偶律的基本规律(III.16)。因此我们有

$$\begin{aligned}\{x(1-y)+y(1-x)\}^2 &= x(1-y)+y(1-x),\\ \{x+(1-x)\}^2 &= x+y(1-x).\end{aligned}$$

以后将会看到，这只不过是表达“事物的类或集合”的表达式的一般规律的一个特殊表现。

7. 这些研究的结果可以体现在以下的表达规则中。

规则。--用记号 、 、 、&c.表示简单的名称或性质，用 1 – x 、 1 – y 、 1 – z 、&c. 表示它们的反面；用按乘法方式连接相应记号的办法，表示由共同名称或性质所定义的事物的类；用符号 + 连接表示各个部分的表达式，来表示由彼此不同的部分所组成的事物的集合。特别地，让表达式“要么是的，要么是的”在和所表示的类互斥时，用 x(1 – y) + y(1 – x) 表示，在它们不互斥时，用 x + y(1 – x) 表示。同样，让表达式“要么是的，要么是的，要么是的”在 、 、 所表示的类被设定为互斥时，用 x(1 – y)(1 – z) + y(1 – x)(1 – z) + z(1 – x)(1 – y) 表示，在它们不被意指为互斥时，用 x + y(1 – x) + z(1 – x)(1 – y) 表示，依此类推。

8. 解释的逆向规则就建立在这条表达规则之上。这两者都将在以下实例中得到或许足够充分的例证。为简洁起见，省略全称主词“事物”或“存在物”，让我们假定

$$x = \text{hard}, y = \text{elastic}, z = \text{metals};$$

我们将得到以下结果：

“非弹性金属”将用 z(1 – y) 表示；
“带有非弹性金属的弹性物质”，用y + z(1 – y)表示；
“除金属外的硬物质”，作者x – z;
“金属物质，除了那些既不硬也无弹性的”，由 z – z(1 – x)(1 – y) 表达，或由 z { 1 –(1 – x)(1 – y) } 表达，见(6)，第二章。在最后一个例子中，我们真正要表达的是“金属，除了不硬、无弹性的金属。”用在形容词之间的连词通常是多余的，因此，不得用记号表达。

因此，“坚硬且有弹性的金属”等价于“坚硬的弹性金属”，并用xyz表示。

接下来看这个表达式：“坚硬物质，除了那些是金属且非弹性的，以及那些是弹性且非金属的。”这里那些一词指的是坚硬物质，因此该表达式实际上意味着，坚硬物质，除了坚硬物质中的金属的、非弹性的，以及坚硬物质中的非金属的、弹性的;“除了”一词延伸到其后的两个类。完整的表达式是

$$\begin{aligned} x - \{xz(1-y) \quad &+ \quad xy(1-z)\}; \\ \text{or, } x \quad &- \quad xz(1-y) - xy(1-z). \end{aligned}$$

9. 前面的命题，连同已经给出的关于它的各种例证，是以下命题的必要预备，后者将完成本章的设计。

命题三。

从对它们可能变体的考察中，推导出一个用于表达初级命题或具体命题的一般方法。

一个主命题，在最一般的意义上，由两个项构成，二者之间的关系被断言存在。这些项不一定是单词名称，而可以代表任何对象的集合，正如我们在前面各节中所一直考虑的那样。因此，表达这些项的方式已包含在上面给出的一般规则之中，现在只须发现项之间的关系应如何表达。这显然将取决于关系的性质，尤其取决于在该关系中，这些项是被理解为全称的还是特称的，即我们所谈论的是一个项所指的那整个对象集合，还是不确定地指其整体或一部分，即前缀“some”的通常含义。

假设我们希望表达“恒星”与“太阳”这两个类之间的同一关系，即表达“所有恒星都是太阳”以及“所有太阳都是恒星”。这里，若以x表示恒星，以y表示太阳，我们便有

$$x = y$$

对于所需的方程。

在命题“All fixed stars are suns”中，项“all fixed stars”将被称为主词，而“suns”被称为谓词。假设我们按以下方式扩展主词和谓词这两个项的含义。所谓主词，我们指任何肯定命题的第一个项，即在系词*is*或*are*之前的项；所谓谓词，我们约定指第二个项，即在系词之后的项；并且我们承认这样的假定：这两者中的任何一个都可以是全称的或特称的，因此在任何一种情况下，都可以隐含整个类，或只隐含它的一部分。于是，对于像上一例那样的情形，我们将有以下规则：--

10.规则。--当一个命题的主词和谓词都是全称时，分别构成它们的表达式，并用=号连接。

这种情况通常出现在表达科学的定义，或按纯粹科学方式处理的主题的定义之时。西尼尔先生关于财富的定义就是这方面的一个好例子，即：

“财富由可转移的、供给有限的、且或者产生快乐或者防止痛苦的事物构成。”

在着手用符号表达这一定义之前，必须指出，连词和是多余的。财富实际上是由其具有三种属性或性质来定义的，而不是由三个类或对象集合组合而成来定义的。那么，略去连词和，让我们令

$$w = \text{wealth.}$$

t = 可转移的事物。

s = 供给有限。

p = 产生快乐。

r = 避免痛苦之物。

现在，从主题的性质可以明白，上述定义中的表达式“Either productive of pleasure or preventive of pain”意在等同于“Either productive of pleasure; or, if not productive of pleasure, preventive of pain”。因此，单就上述表达式本身而言，它所定义的那一类事物将包括一切产生快乐的事物，连同一切不产生快乐但防止痛苦的事物，而其记号表达将是

$$p + (1 - p)r.$$

那么，如果我们给置于括号中的这个表达式附上符号s和t，以表示它的两项都被指涉，并把它的应用限制于“可转移的”和“供给有限的”事物，我们就得到原定义的如下符号等价式，即：

$$w = st\{p + r(1 - p)\}. \tag{1}$$

如果“或者产生快乐或者防止痛苦”这一表达式仅仅意在指出那些产生快乐而不防止痛苦的事物，p(1 – r)，或者防止痛苦而不产生快乐的事物，r(1 – p)(排除那些既产生快乐又防止痛苦的事物)，那么该定义的符号表达式将是

$$w = st\{p(1 - r) + r(1 - p)\}. \tag{2}$$

所有这些都与前面更一般地陈述的内容相符。读者或许会好奇地追问：如果我们逐字地把“产生快乐或防止痛苦的事物”这一表达式译为p + r，使该定义的符号方程为

$$w = st(p + r). \tag{3}$$

答案是，这个表达式将等同于(2)，并附加这样的含义：由stp和str所表示的那些事物类是完全有别的，因此在可转移且供应有限的事物中，宇宙间不存在任何同时既产生快乐又防止痛苦的事物。任何方程的完整含义如何确定，将在以后解释。以上所说可以表明，在试图把我们的材料翻译成严格的记号语言之前，首先必须确定我们所使用的词的*intended*含义。但是，对于那些重视思想正确性、并把语言的正确运用既视为其工具又视为其保障的人来说，这种必要性不能被视为一种坏事。

11. 接下来让我们考虑命题的谓词是特称的情形，例如“所有人都是有死的。”

在这种情况下，显然我们的意思是“所有人都是某些有死的存在物”，并且我们必须寻求谓词“某些有死的存在物”的表达式。

那么，用v表示一个在各方面都不确定、唯有这一点确定的类，即它的某些成员是有死的存在物，并令x表示“有死的存在物”，那么vx将表示“某些有死的存在物”。因此，若y表示人，则所求的方程将是

$$y = vx.$$

由这些考虑，我们得出以下规则，用于表达谓词为特称的肯定全称命题：

规则。--像以前一样表达主词和谓词，给后者附上不定符号，并使两表达式相等。

显然，v是与x、y等等同类的符号，并且它服从一般规律，

$$v^{\prime} = v, or v(1-v) = 0.$$

因此，要表达命题“行星或者是主星或者是次星”，按照规则，我们应这样进行：

设 x 表示行星(主项);

y = 初级物体；
z = 次级体；

然后，假定连词“或者”把“主星”类与“次星”体类绝对地区分开来，就它们在所给命题中进入我们考虑的范围而言，我们得到该命题的方程

$$x = v\left\{y\left(1-z\right) + z\left(1-y\right)\right\}. \tag{4}$$

It may be worth while to notice, that in this case the *literal* translation of the premises into the form

$$x = v(y+z) \tag{5}$$

将完全等价，v是一个不定类符号。形式
(4) 然而，较好的做法是，作为表达式

$$y\left(1-z\right) + z\left(1-y\right)$$

由表示彼此截然不同的类的项构成，并满足二重性的基本规律。如果我们取命题“天体或者是太阳，或者是行星，或者是彗星”，分别用w、x、y、z表示这些事物类，那么在假定没有天体同时属于上述两个 division 的情况下，它的表达式将是

$$w = v\left\{x\left(1-y\right)\left(1-z\right) + y\left(1-x\right)\left(1-z\right) + z\left(1-x\right)\left(1-y\right)\right\}$$

然而，如果其意在于暗示天体或者是太阳，或者若不是太阳则是行星，或者若两者都不是，则既不是太阳也不是行星，而是恒星，这一含义并不排除其中某些天体同时属于

太阳、行星和恒星这三个 division 中的两个或全部三个的假设，--那么所需的表达式将是

$$w = v\{x + y(1-x) + z(1-x)(1-y)\}. \tag{6}$$

上述例子属于描述，而非定义。事实上，命题的谓词通常是特称的。当情况并非如此时，要么谓词是一个单独词项，要么我们不用系词“是”或“是”的某种形式，而用某种连接形式，它意味着谓词应作全称理解。

12. 接下来考虑全称否定命题的情形，例如“没有人是完美的存在物。”

现在显而易见，在这种情况下，我们并不是谈论一个称为“没有人”的类，并对这个类断言其所有成员都是“完美的存在物”。而是我们实际上对“所有人”作出断言，大意是他们“不是完美的存在物”。因此，该命题的真正含义是这样的：

“所有人(主词)是(系词)不完美的(谓词)”；因此，若y表示“人”,x表示“完美的存在物”，我们便有

$$y = v(1-x),$$

and similarly in any other case. Thus we have the following Rule:

RULE.—*To express any proposition of the form “No x’s are y’s,” convert it into the form “All x’s are not y’s,” and then proceed as in the previous case.*

13. 最后，考虑命题的主词是特称的情形，例如“Some men are not wise”。在这里，正如已经指出的，否定词*not*可以恰当地归到谓词*wise*上，至少就逻辑的目的而言肯定可以如此；因为我们并不是要说“Some men are wise”不成立，而是要对“some men”断言其缺乏智慧。因此，所给命题的必需形式是“Some men are not-wise”。于是，以y表示“men”，以x表示“wise”，即“wise beings”，并引入v作为这样一个类的记号：它在一切方面都不确定，唯独这一点除外，即它包含其表达式前所加的那个类的某些个体，我们便有

$$vy = v(1-x).$$

14. 我们可以将已确定的一切概括为以下一般规则：

主项符号表达式的一般规则

命题。

第一，如果命题是肯定命题，就构成主词的表达式和谓词的表达式。如果其中任一个是特称的，就在它上面附加不定记号v，然后使所得的表达式相等。第二，如果命题是否定命题，就先把否定助词附加于谓词以表达其真正含义，然后按上述步骤进行。

一两个额外的例子或许足以说明问题。

例--“没有人处于显赫地位而又免于嫉妒之心。”令y表示“人”,x表示“处于显赫地位”,z表示“免于嫉妒
关于。”

现在，被描述为“处于显赫地位”且“免于嫉妒之心”的类的表达式是xz。因此，相反的类，即这一描述不适用于的那些人，将由1 – xz表示，而所有人都被归入这个类。因此我们有

$$y = v\,(1 - xz)\,.$$

如果这样表达的命题曾被置于等价形式“处于显赫地位的人不免于嫉妒之心”，它的表达式本会是

$$yx = v\,(1 - z)\,.$$

后面将会看到，在所涉及的特定假说下，即v是一个不定类符号的情况下，这个表达式实际上等价于前一个表达式。

例--“没有人是英雄，除了那些将克己与勇气结合起来的人。”设 x = “人”,y = “英雄”,z = “实行克己的人”,w,“那些
“谁拥有勇气。”

该断言实际上是：“不具备勇气且不践行
“自我否定并非英雄。”

因此我们有

$$x\,(1 - zw) = v\,(1 - y)$$

对于所需的方程。

15. 在结束本章时，将各种主要类型的命题用符号表达出来加以比较，或许是有趣的。如果我们同意用 X 和 Y 来表示“项”或相关事物的符号表达式，那么这些类型将是

$$\begin{aligned} X &= vY, \\ X &= Y, \\ vX &= vY. \end{aligned}$$

在第一种中，只有谓词是特称的；在第二种中，两个项都是全称的；在第三种中，两者都是特称的。一些次要形式实际上包含在这些形式之下。因此，如果 Y = 0，第二种形式就变成

$$X = 0;$$

而若 Y = 1，则变为

$$X = 1;$$

这两种形式都容许解释。还应注意到，表达式 X 和 Y，如果建立在对

命题的“项”的含义进行足够仔细的分析的基础上，就将满足对偶性的基本定律，该定律要求我们有

$$\begin{aligned} X^2 = X \quad \text{or} \quad X(1-X) = 0, \\ Y^2 = Y \quad \text{or} \quad Y(1-Y) = 0. \end{aligned}$$

第五章

论符号推理的基本原理，以及

涉及逻辑符号的表达式的展开或发展。

1. 本著作的前几章致力于研究心灵活动在推理中的基本规律；这些规律在逻辑符号的规律中的展开式；以及表达的原则，通过该原则，那种被称为特称的命题可以在符号的语言中被表示出来。这些探究在最严格的意义上是预备性的。它们构成了本论著的主要目标之一--在精确总结思维基本规律的基础上构建一个逻辑的系统或方法--不可或缺的导论。关于这一目标的性质以及实现它的手段，有一些考虑我认为有必要在此提请注意。

2. 我首先要指出，逻辑中一个方法的一般性必然在很大程度上取决于其基本过程和规律的一般性。例如，在本著作前面的各节中，我们研究了以符号+为标记的那种逻辑的加法过程的规律，以及其他事项。现在，那些规律是从对实例的研究中确定下来的，在所有这些实例中，一个必要的条件是，在思想中加在一起的类或事物应当是互斥的。表达式 x + y 似乎确实不可解释，除非假定由 x 所表示的事物和由 y 所表示的事物是完全分离的；它们不包含任何共同的个体。而与此类似的条件也涉及那些概念活动，通过对这些活动的研究，其他符号运算的规律得以确定。于是问题产生了：是否有必要将这些符号规律和过程的应用限制在获得它们知识时所依据的同样的可解释性条件之下。如果这种限制是必要的，那么显然，逻辑中一般方法这样的东西就是不可能的。另一方面，如果这种限制是不必要的，那么我们应当以何种眼光来看待那些在它们被设计来辅助的思想领域中似乎不可解释的过程呢?这些问题不仅仅属于逻辑科学。它们同样

与每一种基于符号语言之运用而发展起来的人类推理形式相关。

3. 我其次要指出，这种过程与解释之间表面上的对应关系的缺失，在人类理性的普通应用中并不会显现出来。因为在那些应用中，没有哪种运算的意义和应用是未被看到的；而对于大多数心灵来说，仅仅形式推理连接其前提和结论是不够的；连接序列的每一步，在论证过程中所建立的每一个中介结果，也必须是可以理解的。毫无疑问，在日常生活和言谈的推理中，这既是一个实际条件，也是一项重要的保障。

也许有许多人倾向于将同样的原则扩展到符号语言作为推理工具的一般使用上。可以论证说，既然支配符号使用的规律或公理是仅通过对那些解释成为可能的实例的研究而建立的，我们就无权将它们应用于解释不可能或可疑的其他实例，即使(应当承认)这种应用仅用于论证的中间步骤。如果这一反对意见是决定性的，那就必须承认，在逻辑中使用符号方法所能获得的益处微乎其微。也许那种益处将仅限于以简短方便的符号代替更为笨重的符号这种机械性的收获。但这一反对意见本身是谬误的。无论我们的`*a priori*`预期可能是什么，一个不容置疑的事实是：通过任何符号推理过程所得出的结论的有效性，并不取决于我们解释在探究的不同阶段所呈现的形式结果的能力。事实上，存在某些关于符号方法使用的一般原则，它们作为与逻辑这一特定主题相关的内容，我将首先陈述，然后对其性质和其被接受的理由作一些评论。

4. 借助符号，有效推理的条件是--

第一，对于在表达已知数据时所使用的记号，必须赋予固定的解释；并且必须根据该解释正确地确定这些记号组合的规律。第二，求解或证明的形式过程必须自始至终遵循如上确定的一切规律，而不考虑所获得的特定结果是否可解释的问题。第三，最终结果必须在形式上可解释，并且必须按照在表达已知数据时所采用的那套解释体系来实际地加以解释。关于这些原则，可以作出以下观察。

5. 对记号作固定解释的必要性已经充分论述过了(II.3)。固定结果必须采取能够应用那种解释的形式，这一必要性建立在一个显而易见的原则之上：记号的使用是达到目的的手段，而这个目的就是认识某种可理解的事实或真理。并且，为了使这个目的

得以达到，表达符号结论的最终结果必须采取可解释的形式。然而，很可能正是在与上述一般原则或条件中的第二条(V.4)相关的地方，会感到最大的困难，关于这一点还需要补充几句话。

那么我要指出，所讨论的这个原理可以被视为建立在心灵的一条普遍规律之上，关于这条规律的知识并不是`*a priori*地、即在经验之先给予我们的，而是像关于心灵其他规律的知识一样，从普遍原理在特殊实例中的清晰显现中得来的。推理的一个单一例子，其中记号依照建立在其解释之上的规律而被使用，但并未持续参照那种解释，论证的链条引导我们经过不可解释的中间步骤而达到一个可解释的最终结果，这似乎不仅确立了该特殊应用的有效性，而且使我们认识到其中所显现的普遍规律。任何实例的积累都不能恰当地为这样的证据增添分量。它可以为我们提供关于那条真理的共同元素的更清晰概念，而原理的应用正依赖于那条真理，从而为其接受铺平道路。在证据的直接力量未被感受到的地方，它可以作为对所述原理实践有效性的`*a posteriori*验证。但这并不影响所肯定的立场，即：普遍原理必须在特殊实例中被看到--被看到在其应用中是一般的，正如在特殊例子中是真的。在三角学的中间过程中使用不可解释的记号$\sqrt{\ }-1$，为上述说法提供了一个例证。我认为，没有任何解释那种应用的方式不暗中假定所讨论的这个原理本身。但是，这个原理，虽然在我看来并非由基于其他根据的形式推理所保证，却似乎值得在那些公理真理中占有一席之地，这些公理真理在某种意义上构成了普遍知识可能性的基础，并且可以恰当地被视为心灵自身规律和构造的表达。

---

6. 以下是上述原理在本书中将如何被应用的方式。已经看到，任何命题系统都可以通过涉及记号x、y、z的方程来表达，这些记号只要解释是可能的，就服从与一个量记号系统的规律在形式上相同的规律，只可取0和1两个值(II.15)。但由于推理的形式过程只依赖于记号的规律，而不依赖于其解释的性质，我们被允许把上述记号x、y、z当作上述那种量记号来处理。我们事实上可以搁置给定方程中记号的逻辑解释；把它们转换为量记号，只可取 0 和 1 ；对它们作为这样的记号执行一切必要的求解过程；最后恢复它们的逻辑解释。而这正是实际将采用的程序方式，尽管在每一实例中重述所采用的变换的性质将被视为不必要。记号x、y、z作为上述种类的量记号所服从的过程，并不限于

受那些思维条件的约束--如果这些运算施于纯粹逻辑记号之上，它们本应服从这些条件--并且我们在使用它们时获得了操作的自由，没有这种自由，对逻辑中一般方法的探求就会成为无望的追寻。

现在，上述过程系统将不会引导我们达到任何可理解的结果，除非由此产生的最终方程具有一种形式，使得在把逻辑意义恢复给记号之后，对它们的解释成为可能。然而，存在一种把方程化为这种形式的一般方法，本章的剩余部分将致力于对它的考察。关于这种方法如何使解释成为可能，我将很少谈及--这一点留待下一章--而在此将主要限于所采用的单纯过程，这个过程可以被称为“展开式”过程。作为对这一过程性质的引导，或许宜先作几点观察。

7. 假定我们正就以下问题考察任何一类事物，即：其成员在具有或不具有某种性质x方面的关系。由于所提出的类中的每一个体或者具有或者不具有所讨论的性质，我们可以把该类分为两部分，前者由具有该性质的个体组成，后者由不具有该性质的个体组成。这种在思想中把整个类分为两个组成部分的可能性，先于从任何其他来源获得的关于该类构造的一切知识；那种知识的效果只能是或多或少精确地告知我们，具有和不具有给定性质的类的各部分还服从哪些进一步的条件。那么，假定这种知识如下，即：具有性质x的那部分的成员，也具有某种性质u，并且这些联合的条件是它们的一个充分定义。那么我们便可以用表达式ux(II.6)表示原类的那个部分。如果进一步我们获得信息说，原类中不具有性质x的成员服从一个条件v，并由此得到定义，那么很清楚，那些成员将由表达式v(1 – x)表示。因此该类在总体上将由

$$ux + v\,(1 - x)\,;$$

这可以被视为表达任何一类对象的一般展开形式，这些对象是就具有或缺乏某一给定性质 x 而言被考虑的。

这样纯粹基于逻辑理由建立起来的一般形式，也可以从形式定律的不同考虑中推导出来，这些考虑同样适用于记号 x、y、z，既适用于已经提到的它们的逻辑解释，也适用于它们的量的解释(V.6)。

8. 定义。--任何含有记号 x 的代数表达式都称为 x 的函数，并可以用缩写的一般形式 f(x) 来表示。任何含有两个记号 x 和 y 的表达式同样称为 x 和 y 的函数，并可以用一般形式 f(x, y) 来表示，依此类推

for any other case.

Thus the form $f(x)$ would indifferently represent any of the following functions, viz., x, $1-x$, $\frac{1+x}{1-x}$, &c.; and $f(x,y)$ would equally represent any of the forms $x+y$, $x-2y$, $\frac{x+y}{x-2y}$, &c.

按照同样的记号原则，如果在任何函数 f(x) 中我们把 x 变成 1，结果将用形式 f(1) 来表示；如果在同一函数中我们把 x 变成 0，结果将用形式 f(0) 来表示。因此，如果 f(x) 表示函数 a + x

$\frac{a+x}{a-2x}$, $f(1)$ will represent $\frac{a+1}{a-2}$, and $f(0)$ will represent $\frac{a}{a}$.

9. 定义。--任何函数 f(x)，其中 x 是一个逻辑记号，或一个只能取 0 和 1 这两个值的量的记号，当它被化为形式 ax + b(1 – x) 时，就说它被展开了，其中 a 和 b 被确定为使结果等价于它所由导出的那个函数。

这个定义假定，有可能把任何函数 f(x) 表示为所设的形式。这一假定在下面的命题中得到证明。

命题一。

10. *To develop any function $f(x)$ in which x is a logical symbol.*

By the principle which has been asserted in this chapter, it is lawful to treat x as a quantitative symbol, susceptible only of the values 0 and 1.

Assume then,

$$f(x) = ax + b(1-x),$$

and making $x = 1$, we have

$$f(1) = a.$$

同样，在令x = 0 的同一方程中，我们有

$$f(0) = b.$$

Hence the values of a and b are determined, and substituting them in the first equation, we have

$$f(x) = f(1)\,x + f(0)\,(1-x); \tag{11}$$

as the development sought.[1] The second member of the equation adequately represents the function $f(x)$, whatever the form of that function may be. For

1 对某些人来说，指出以下一点或许是有趣的：本章所得到的 f(x) 的展开式，在逻辑体系中严格占据着 f(x) 按 x 的升幂展开在普通代数体系中所占的位置。因此，它可以借助泰勒著名定理的表达式引入而得到，即：

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,\frac{x^2}{1\cdot 2} + f'''(0)\,\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3},\ \text{&c.} \tag{1}$$

the condition $x(1-x)=0$, whence we find $x^2 = x$, $x^3 = x$, &c., and

$$f(x) = f(0) + \left\{ f'(0) + \frac{f''(0)}{1\cdot 2} + \frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{&c.} \right\} x. \tag{2}$$

But making in (1), $x = 1$, we get

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{1\cdot 2} + \frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{&c.}$$

x 作为量的记号只容许取 0 和 1 这两个值，而对于这两个值中的每一个，展开式

$$f(1)\,x + f(0)\,(1-x)\,,$$

与函数f(x)取相同的值。

作为例证，设需展开函数1+ x 1+2 x 。此处，当 x = 1 时，我们求得 f(1) = 23,而当x=0 时，我们求得f(0)=11,或1。因此所求的表达式为

$$\frac{1+x}{1+2x} = \frac{2}{3}x + 1 - x\ ;$$

并且这个方程对于记号 x 所能取的每一个值都得到满足。

命题二。

展开或发展一个含有任意数目逻辑记号的函数。让我们从有两个记号 x 和 y 的情形开始，并让我们用 f(x, y) 表示要展开的函数。

首先，把 f(x, y) 看作仅 x 的函数，并用一般定理(1)展开它，我们有

$$f(x,y) = f(1,y)\,x + f(0,y)\,(1-x)\,; \tag{2}$$

其中 f(1 , y) 表示所设函数在把其中的 x 写作 1 时变成什么，而 f(0 , y) 表示上述函数在把其中的 x 写作 0 时变成什么。

$$f(1,y) = f(1,1)\,y + f(1,0)\,(1-y)\,, \tag{3}$$

其中 f(1 , 1) 表示 f(1 , y) 在使 y 等于 1 时变成什么，而 f(1 , 0) 表示 f(1 , y) 在使 y 等于 0 时变成什么。

同样地，系数 f(0 , y) 通过展开给出，

$$f(0,y) = f(0,1)\,y + f(0,0)\,(1-y)\,. \tag{4}$$

---

whence

$$f'(0) + \frac{f''(0)}{1\cdot 2} + \ \&\text{c.} = f(1) - f(0),$$

and (2) becomes, on substitution,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \{f(1) - f(0)\}x, \\ &= f(1)x + f(0)(1-x), \end{aligned}$$

the form in question. This demonstration in supposing $f(x)$ to be developable in a series of ascending powers of x is less general than the one in the text.

把(3)和(4)中给出的 f(1 , y)、f(0 , y) 的值代入(2)，我们便得到

$$f(x,y) = f(1,1)\,xy + f(1,0)\,x(1-y) + f(0,1)\,(1-x)\,y \tag{5}$$
$$+f(0,0)\,(1-x)\,(1-y)\,, \tag{6}$$

这就是所需的展开式。这里 f(1 , 1) 表示 f(x, y) 在我们在其中令 x = 1、y = 1 时变成什么；f(1 , 0) 表示 f(x, y) 在我们在其中令 x = 1、y = 0 时变成什么，其余依此类推。

Thus, if $f(x,y)$ represent the function $\frac{1-x}{1-y}$, we find

$$f(1,1) = \frac{0}{0}, \qquad f(1,0) = \frac{0}{1}, \qquad f(0,1) = \frac{1}{0}, \qquad f(0,0) = 1$$

由此得到给定函数的展开式

$$\frac{0}{0}xy + 0x(1-y) + \frac{1}{0}(1-x)\,y + (1-x)\,(1-y)\,.$$

在下一章中将可看到，形式00和10,其中前者被数学家称为不定量的记号，在像上面这样的表达式中容许一种非常重要的逻辑解释。

其次，假定要展开的函数中有三个记号，我们可以用一般形式 f(x, y, z) 来表示它。像以前一样进行，我们得到

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(1,1,1)\,xyz + f(1,1,0)\,xy(1-z) + f(1,0,1)\,x(1-y)\,z \\ &+ f(1,0,0)\,x(1-y)\,(1-z) + f(0,1,1)\,(1-x)\,yz \\ &+ f(0,1,0)\,(1-x)\,y(1-z) + f(0,0,1)\,(1-x)\,(1-y)\,z \\ &+ f(0,0,0)\,(1-x)\,(1-y)\,(1-z) \end{aligned}$$

其中 f(1 , 1 , 1) 表示函数 f(x, y, z) 在我们在其中令 x = 1、y = 1、z = 1 时变成什么，其余依此类推。

11. 现在很容易看出决定任何所设函数之展开的一般定律，并把实现展开的方法归结为一条规则。但在着手表述这样一条规则之前，先提出以下观察将是方便的：--

我们所得到的每一种展开式都由某些项组成，记号 x、y 等进入这些项，并乘以系数，而那些记号不进入这些系数。因此，f(x) 的展开式由两项组成，即 x 和 1 – x，分别乘以系数 f(1) 和 f(0)。而 f(x, y) 的展开式由四项组成，即 xy、x(1 – y)、(1 – x) y 和 (1 – x)、(1 – y)，分别乘以系数 f(1 , 1)、f(1 , 0)、f(0 , 1)、f(0 , 0)。在前一种情形中的项 x、1 – x，以及在后一种情形中的项 xy、x(1 – y) 等，我们将称之为展开式的构成成分。显然，它们在形式上独立于所要展开的函数的形式。在构成成分 xy 中，x 和 y 被称为因子。

因此，展开的一般规则将由两部分组成，第一部分涉及展开的成分的形成，第二部分涉及它们各自系数的确定。规则如下：

第一。展开记号 、 、 的任一函数 z。- 按以下方式形成一系列构成成分：令第一个构成成分为这些记号的乘积；在这个乘积中，将任一记号 z 变为 1 – z，作为第二个构成成分。然后在这两者中，将任何另一个记号 y 变为 1 – y，作为另外两个构成成分。然后在由此得到的四个构成成分中，将任何另一个记号 x 变为 1 – x，作为四个新的构成成分，如此继续，直到可能的变化数目用尽为止。

其次。求任一成分的系数。--若该成分含有x作为因子，则将原函数中的x变为1；但若该成分含有1 – x作为因子，则将原函数中的x变为0。对记号y、z等应用同一规则：如此变换后的函数最终计算所得的值即为所求的系数。

各成分分别乘以其相应系数后的总和，即为所求的展开式。

12.值得注意的是，一个函数可以相对于它并未明确含有的记号而展开。因此，若按照规则，我们试图将函数1 – x相对于记号x和y展开，我们便得到，

当	x = 1	且	y = 1	给定的函数	= 0.
	x = 1	?	y = 0	? ?	= 0.
	x = 0	?	y = 1	? ?	= 1.
	x = 0	?	y = 0	? ?	= 1.

由此发展而来

$$1 - x = 0xy + 0x\,(1 - y) + (1 - x)\,y + (1 - x)\,(1 - y)\,;$$

and this is a true development. The addition of the terms $(1 - x)\,y$ and $(1 - x)\,(1 - y)$ produces the function $1 - x$.

The symbol 1 thus developed according to the rule, with respect to the symbol x, gives

$$x + 1 - x.$$

Developed with respect to x and y, it gives

$$xy + x\,(1 - y) + (1 - x)\,y + (1 - x)\,(1 - y)\,.$$

类似地，相对于任何一组记号展开，它产生一个由这些记号的所有可能成分组成的级数。

13. 关于一般展开式的性质，还可以适当地补充几点意见。让我们以一般定理(5)为例，它呈现了两个逻辑符号的函数的展开式的类型。首先，当 x 和 y 是本章所考虑的那类量的记号时，无论赋予函数 f(x, y) 什么代数的形式，该定理都是完全真实且可理解的，因此它可以

可以在分析过程的任何阶段被可理解地运用，该阶段介于上述记号解释从逻辑系统到定量系统的改变与逻辑解释的最终恢复之间。

其次。当x和y是逻辑记号时，只要函数f(x, y)的形式能够表示一个类或事物的集合，该定理便完全真实且可理解，在此情形下第二项总是逻辑上可解释的。例如，若f(x, y)表示函数1 – x + xy，则应用该定理我们得到

$$\begin{aligned} 1-x+xy &= xy+0x\,(1-y)+(1-x)\,y+(1-x)\,(1-y)\,, \\ &= xy+(1-x)\,y+(1-x)\,(1-y)\,, \end{aligned}$$

and this result is intelligible and true.

因此我们可以认为，对于上述种类的定量记号，该定理是真实且可理解的，总是如此；对于逻辑记号，当可解释时总是如此。因此，无论何时在本著作中运用该定理，都必须理解为：若所得的展开式不可解释，则记号x、y是定量的且属于所提及的特定种类。

然而，尽管展开式并不总是直接可解释的，它却总能立即引导我们得到可解释的结果。因此，表达式x – y展开后给出形式

$$x\,(1-y)-y\,(1-x)\,,$$

该形式一般不可解释。我们不能在思想中从那些是x而非y的事物的类中，取出那些是y而非x的事物的类，因为后一类并不包含在前一类之中。但若形式x – y作为某一方程的第一项出现，而该方程的第二项为0，则展开后我们便得到

$$x\,(1-y)-y\,(1-x)=0.$$

现在，下一章将表明，上述方程，在x和y被视为定量的且属于所述种类时，可立即分解为两个方程

$$x\,(1-y)=0, \quad y\,(1-x)=0,$$

而当记号x和y被赋予逻辑解释时，这些方程在逻辑中直接可解释。并且可以指出，尽管函数在展开后并不必然变得可解释，然而方程总能通过这一过程化为可解释的形式。

14. 下述命题确立了构成成分的一些重要性质。在其表述中，记号 t 被用来随意表示展开式的任一构成成分。因此，如果展开式是两个记号 x 和 y 的函数的展开式，则 t 表示四种形式 xy、x(1 – y)、(1 – x) y 和 (1 – x)(1 – y) 中的任何一种。在需要用单个记号表示展开式的构成成分、同时又要将它们彼此区分开来的地方，这种区分将用下标来标记。因此，t_1可以用来表示 xy,t_2用来表示 x(1 – y)，如此等等。

命题三。

Any single constituent t of an expansion satisfies the law of duality whose expression is

$$t(1-t)=0.$$

The product of any two distinct constituents of an expansion is equal to 0, *and the sum of all the constituents is equal to* 1.

1st. Consider the particular constituent xy. We have

$$xy \times xy = x^2y^2.$$

但根据类记号的基本规律，$x^2 = x, y^2 = y$；因此

$$xy \times xy = xy.$$

Or representing xy by t,

$$t \times t = t,$$

or

$$t(1-t)=0.$$

Similarly the constituent $x(1-y)$ satisfies the same law. For we have

$$x^2 = x, (1-y)^2 = 1-y,$$
$$\therefore \{x(1-y)\}^2 = x(1-y), \text{ or } t(1-t)=0.$$

现在，每一成分的每一因子要么具有x的形式，要么具有1 – x的形式。因此每一因子的平方等于该因子，从而各因子之积(即该成分)的平方等于该成分；因此，以t表示任一成分，我们有

$$t^2 = t, \text{ or } t(1-t)=0.$$

其次。任意两个成分之积为0。这从方程x(1 – x) = 0所表达的记号的一般规律即可明显看出；因为无论我们在同一展开式中取哪些成分，其中一个中至少会有一个因子x，与之相对应，另一个中会有一个因子1 – x。

第三。展开式的所有构成成分之和为 1。这从两个构成成分 x 和 1 – x 的相加，或四个构成成分 xy、x(1 – y)、(1 – x) y、(1 – x)(1 – y) 的相加，是显然的。但它也可以、并且更一般地，通过按任意一组记号展开 1 来证明(V.12)。在这种情形中，构成成分按通常方式形成，且所有系数均为 1。

15. 与上述命题相联系，我们可引出以下内容。

命题四。

如果表示任一 *constituent* 级数之和，其各自的系数为 1 ，那么条件得到满足，

$$V\left(1-V\right)=0$$

设 t 1、t 2.....t n 为所讨论的 constituents，则

$$V=t_1+t_2\cdots+t_n.$$

两边平方，并注意到 t 21=t1,t1t2,=0,&c.,我们有

$$V^{\text{“}}=t_1+t_2\cdots+t_n;$$

由此

$$V=V^2.$$

因此 Therefore

$$V\left(1-V\right)=0.$$

第六章

论逻辑方程的一般解释，以及由此产生的命题分析。兼论逻辑函数的可解释性条件。

1. 已经注意到，按照上一章所证明的一般规则，任何函数的完全展开都涉及两组不同的元素，即展开式的 constituents 及其系数。本章拟先探究 constituents 的解释，然后再探究该解释受与之相联系的系数所修饰的方式。

“逻辑方程”、“逻辑函数”等术语将一般地用来指称任何涉及记号x、y等的方程或函数，这些方程或函数可能出现在一个前提系统的表达式中，或出现在介于前提与结论之间的符号结果的序列中。如果该函数或方程的形式不能立即在逻辑中被解释，则记号x、y等必须被视为前几章(II.15)、(V.6)中所描述的那类定量记号，满足定律，

$$x\,(1-x)=0.$$

因此，所谓任何这类逻辑函数或方程的解释问题，就是指把它化归为这样一种形式：当把逻辑值赋予记号 x、y 等时，它将成为可解释的，并连同由此产生的解释。这些约定性定义符合上一章所奠定的、进行本论著方法的一般原则。

命题一。

2. 任何逻辑记号 、 等的函数的展开式的 *constituents* 是可解释的，并且表示论域的若干互斥划分，这些划分是通过以一切可能的方式肯定和否定记号 、 等所表示的性质而形成的。

为使概念更为清晰，设所展开的函数涉及两个记号 x 和 y，展开是相对于它们进行的。于是我们有以下 constituents，即：

$$xy,\ x\left(1-y\right),\ \left(1-x\right)y,\ \left(1-x\right)\ \left(1-y\right).$$

在这些项中，显然第一个xy代表同时具有由x和y所表达的基本性质的那一类对象，而第二个x(1 – y)代表具有性质x但不具有性质y的那一类。同样地，第三个成分代表具有由y所表示的性质但不具有由x所表示的性质的那一类对象；而第四个成分(1 – x)(1 – y)代表这样一类对象，其成员既不具有所讨论的性质中的任何一个。

因此，刚才所考虑的情形中的成分代表了可以由对x和y所表达的性质的肯定和否定来描述的全部四类对象。这些类彼此不同。一个类的成员不是另一个类的成员，因为每一类都具有某种与任何其他类所具有的性质或性质相反的性质或性质。再者，这些类合在一起构成论域，因为没有哪个对象不能由某一给定性质的有无来描述，因此论域中的每一个个别事物都可以被归入由两个给定类x和y及其相反者的可能组合所形成的四个类中的某一个。

这里就 f(x, y) 的 constituents 所作的评论在性质上完全是普遍的。任何展开式的 constituents 都表示类--这些类由于具有相反的性质而彼此区别，并且它们共同构成论域。

3. 成分的这些性质在上一章结论中所证明的定理中得到了表达，因而本可以从那里推导出来。从每个成分都满足个体记号的基本定律这一事实，本可以猜想每个成分都代表一个类。从展开式的任意两个成分的乘积为零这一事实，本可以得出结论说它们所代表的类互相排斥。最后，从展开式的各成分之和为一这一事实，本可以推断出它们所代表的类合在一起构成论域。

4. 逻辑方程的分析和解释是建立在上述所确定的成分的定律及其解释方式之上的。一切这样的方程都可以通过展开定理而得到解释，这一点已经陈述过了。我在此打算考察在一系列推理的结论中如此呈现出来的可能解的形式，并表明这些形式是如何产生的。尽管严格说来它们只不过是一个单一的基本类型或表达原则的表现，但把它们所呈现的次要变化分别呈现于心灵之前，将有助于理解的清晰。

这些形式共有三种，具体如下：

式 i。

5. 我们将首先考虑的形式，是在任何逻辑方程 V = 0 被展开，并且其结果在分解为各分量方程之后加以解释时出现的。该函数被假定涉及逻辑记号 x、y 等，其组合不是分数形式的。事实上，分数组合只出现在我们谈到上述第三种解的形式时将考虑的那类问题中。

命题二。

解释逻辑方程 V = 0 。

为简单起见，设 V 只涉及两个记号 x 和 y，并设给定方程的展开式表示为

$$axy + bx\,(1-y) + c\,(1-x)\,y + d\,(1-x)\,(1-y) = 0; \qquad (1)$$

a、b、c 和 d 为确定的数值常数。

现在，设任一系数，如 a，不为零。那么，将方程两边乘以该系数所附的 constituent xy，我们得到

$$axy = 0,$$

因此，既然 a 不为零，

$$xy = 0,$$

而这个结果与展开式其他系数的性质完全无关。当把逻辑意义赋予 x 和 y 时，它的解释是："不存在同时属于 x 所表示的类和 y 所表示的类的个体。"

但如果系数 a 确实为零，则项 axy 不出现在展开式(1)中，因此不能由此推出方程 xy = 0。

同样地，如果系数 b 不为零，我们有

$$x\,(1-y) = 0,$$

这可以解释为："不存在同时属于 x 类而不属于 y 类的个体。"

然而，如上两种解释中的任何一种，都可以如下文将要表明的那样，以不同的形式展示出来。

这样从展开式中系数不为零的各项所得到的各个不同解释之和，将构成方程 V = 0 的完整解释。这一分析与函数 V 所涉及的逻辑记号的数目本质上无关，因此，本命题的目的在一切情况下都将通过以下规则达到：--

规则。--展开函数 ，并将每个系数不为零的 *constituent* 等于 0 。这些结果的解释合在一起将构成给定方程的解释。

6. 让我们以犹太律法中关于“洁净兽”的定义为例，即“洁净兽是既分蹄又反刍的兽”，并设

x = 洁净兽；y = 分蹄的兽；z = 反刍的兽；

那么给定的命题将被表示为

由方程

$$x = yz$$

我们将把它化为以下形式

$$x - yz = 0,$$

and seek that form of interpretation to which the present method leads. Fully developing the first member, we have

$$0xyz + xy\,(1-z) + x\,(1-y)\,z + x\,(1-y)\,(1-z)$$
$$-\,(1-x)\,yz + 0\,(1-x)\,y\,(1-z) + 0\,(1-x)\,(1-y)\,z + 0\,(1-x)\,(1-y)\,(1-z)\,.$$

Whence the terms, whose coefficients do not vanish, give

$$xy\,(1-z) = 0,\ xz\,(1-y) = 0,\ x\,(1-y)\,(1-z) = 0,\ (1-x)\,yz = 0.$$

These equations express a denial of the existence of certain classes of objects, viz.:

1st. Of beasts which are clean, and divide the hoof, but do not chew the cud.

2nd. Of beasts which are clean, and chew the cud, but do not divide the hoof.

3rd. Of beasts which are clean, and neither divide the hoof nor chew the cud.

第四，关于分蹄、反刍而不洁净的兽。所有这些个别的否定实际上都包含在原命题之中。反过来，如果承认这些否定，原命题便作为必然结论随之成立。事实上，它们就是该命题的各个独立元素。因此，每一个初始命题都可以被分解为对某些确定的事物类之存在的一系列否定，并且可以从那个否定系统本身重新构造出来。这里或许可以问：如何可能从一系列否定或否认中构造出一个肯定命题?那个肯定的要素又从何而来?我回答说：心灵假定有一个宇宙存在，这既不是`先验地作为独立于经验的事实，也不是`后验地作为从经验得出的演绎，就是假设地作为肯定推理之可能性的基础。于是，从命题“没有不会犯错误的人”出发--这是对“不会犯错误的人”之存在的否定或否认--可以或者假设地推出“所有人(如果人存在)都会犯错误”，或者绝对地推出(经验已向我们保证这一族类的存在)“所有人都会犯错误”。

本命题的方法所展示的结论形式，可以称为“单一或联合否定”的形式。

式 ii。

7. 正如前一形式是从第二项为 0 的方程的展开和解释中得出的，当前这一作为其补充的形式，将从第二项为 1 的方程的展开和解释中得出。不过，它很容易从前一命题的分析中得到提示。

因此在最后讨论的例子中，我们从方程推导出

$$x - yz = 0$$

对 constituents 所表示的类的存在的联合否定

$$xy\,(1-z)\,, \quad xz\,(1-y)\,, \quad x\,(1-y)\,(1-z)\,, \quad (1-x)\,yz,$$

其系数不等于 0。由此可知，其余 constituents 所表示的类构成论域。因此我们将有

xyz +(1 – x) y(1 – z) +(1 – x)(1 – y) z +(1 – x)(1 – y)(1 – z) = 1 .这等价于肯定一切存在物都属于下列各类中的某一类，即：

第一，分蹄且反刍的洁净牲畜。
第二，分蹄但不反刍的走兽是不洁净的。
第三，反刍而不分蹄的不洁之兽。
第四，既不是洁净的兽，也不是反刍的，也不是分蹄的。

这种结论形式可以称为“单一或析取肯定”的形式--当最终方程中只出现一个 constituent 时为单一；当如上文那样出现多于一个 constituent 时为析取。

任何方程，V = 0，其中V满足对偶律，也可以通过将其化为形式1 – V = 1并展开第一项，使之产生这种形式的解释。然而，这种情况实际上包含在下一个一般形式中。前两种形式与以下形式相比都稍显次要。

形式 iii。

8. 在前两个例子中，需要展开的函数被等同于
分别对应0和1。在当前情况下，我将假定相应的函数等于任意逻辑记号w。然后我们要努力解释方程V = w，其中V是逻辑记号x、y、z等的函数。然而，首先我认为有必要说明方程V = w，或者通常表现为w = V，是如何产生的。

让我们重新采用前面例子中使用的“洁净兽”的定义，即“洁净兽是那些既分蹄又反刍的兽”，并假定需要确定“反刍的兽”

与“洁净兽”和“分蹄的兽”之间的关系。表达给定命题的方程是

$$x = yz,$$

如果我们能将z确定为x和y的可解释函数，我们的目标就将实现。

现在将x、y、z视为服从特殊规律的量的记号，我们可以通过求解从上述方程中推出

$$z = \frac{x}{y}.$$

但这个方程目前不是可解释的形式。如果我们能将其化为这种形式，它就能提供所需的关系。

展开上述方程的第二项，我们得到

$$z = xy + \frac{1}{0}x\,(1-y) + 0\,(1-x)\,y + \frac{0}{0}\,(1-x)\,(1-y)\,,$$

后文(命题3)将表明，这允许以下解释：

“反刍的兽由所有洁净兽(它们也分蹄)以及不洁净兽中不分蹄的不定剩余部分(一些、没有或全部)组成。”

9. 上述是逻辑中一个具有最大普遍性的问题的特殊例子，该问题可以这样表述：“给定连接记号x、y、z、w的任何逻辑方程，要求给出一个可解释的表达式，表示由w所代表的类与其他记号x、y、z等所代表的类之间的关系。”

这个问题的解决在所有情况下都在于：从给定的方程出发，确定上述记号w用其他记号表示的表达式，并通过展开式使该表达式成为可解释的。现在，给定的方程相对于其中所涉及的每一个记号而言总是一次的。因此，w所要求的表达式总是可以找到的。事实上，如果我们展开给定的方程，无论它相对于w的形式如何，我们都会得到一个如下形式的方程

$$Ew + E'\,(1-w) = 0, \tag{1}$$

E和E′是其余记号的函数。由上述我们得到

$$E' = (E' - E)\,w.$$

Therefore

$$w = \frac{E'}{E' - E} \tag{2}$$

and expanding the second member by the rule of development, it will only remain to interpret the result in logic by the next proposition.

如果分数 E′ E′−E 在其分子和分母中有公

我们不被允许舍弃它们，除非它们仅仅是数值常数。因为记号x、y等，若被视为量的，可能容许这样的值0和1，以致公因子变为等于0，在这种情况下代数的约简规则失效。这正是我们在关于代数除法公理失效的评论(II.14)中所考虑的情形。将解表达为形式(2)，并且不试图进行任何未经授权的约简，而是通过展开式定理来解释结果，这一做法严格符合本论著的一般原则。

如果需要由1 – w所表达的类与其他类x、y等的关系，我们如上所述从(1)推出，

$$1 - w = \frac{E}{E - E'},$$

对其解释也适用以下命题的方法：

命题三。

10. 确定任何形式为 w = V 的逻辑方程的解释，其中是一个类记号，而是一个形式完全不受限制的其他类记号的函数。

设上述方程的第二项完全展开。结果的每个系数将属于四个类中的某一个，我们接着讨论这些类及其各自的解释。

第一，设系数为1。由于这是论域的记号，并且任意两个类记号的乘积代表同时存在于两个类中的个体，任何以1为系数的构成项都必须无限制地解释，即它所代表的整个类都被蕴含。

第二，设系数为0。正如在逻辑中与算术中一样，这是“无”的记号，凡以它为前缀的构成项所代表的类，其任何部分都不得取用。

第三。设系数具有形式00.现在，正如在算术中，该记号
00代表一个不定数,除非当另有确定由某些特殊情形时，类比会提示在本著作的体系中同一记号应代表一个不定类。这确实是其真正含义，将从以下例子中清楚看出：

让我们取命题“不死的人不存在”；用记号表示这个命题；并按照已证明这些记号所服从的规律，寻求用“人”来反向定义“会死的存在者”。

现在，如果我们用y表示“人”，用x表示“会死的存在者”，则命题“不是会死的人不存在”将用方程表达为

$$y\,(1 - x) = 0,$$

我们要从中求 x 的值。现在上述方程给出

$$y - yx = 0, \text{ or } yx = y.$$

如果这是一个普通的代数方程，我们接下来应该用它除以y。但第11章已经指出，除法运算不能用我们现在所处理的记号来进行。那么，我们的办法是表达该运算，并用前一章的方法展开结果。于是，我们首先有，

$$x = \frac{y}{y},$$

并且，按指示展开第二项，

$$x = y + \frac{0}{0}(1 - y).$$

这意味着有死者(x)由全部人(y)连同那些不是人(1 – y)的存在者中由系数00所指示的剩余部分构成。现在让我们来探究什么剩余部分的“不是人”是由前提所蕴含的。可能会发生的是，这个剩余部分包括所有不是人的存在者，或者它可能只包括其中一些而不包括另一些，或者它可能一个也不包括，而这些假定中的任何一个都会与我们的前提完全一致。换言之，无论那些不是人的存在者是它们中的全部、还是有些、还是没有是有死的，那个实际上断言所有人都是有死的前提之真都将同样不受影响，因此表达式00在这里表示：其表达式被附加上该系数的那个类，必须取全部、有些或没有。

尽管上述对记号00is意义的确定仅建立在对一个特例的考察之上，然而论证中所涉及的原理是普遍的，不存在该记号可能呈现而同一分析方式不适用的情形。我们可以恰当地称00an不定类记号,并且可以，如果方便性要求，用一个非复合的记号 v 来替换它，服从基本规律，v(1 – v) = 0。

第四，展开式中某一成分的系数可能不属于上述任何一种情形。当此情形发生时，为确定其真正的解释，须先设定以下定理：

11. 定理。--如果一个函数，意在表示任何类或对象的集合，，被展开，并且如果其展开式中任何构成项的数值系数，不满足该规律。

$$a(1 - a) = 0,$$

then the constituent in question must be made equal to 0.

To prove the theorem generally, let us represent the expansion given, under the form

$$w = a_1 t_1 + a_2 t_2 + a_3 t_3 + \&c., \tag{1}$$

其中t 1、t 2、t 3等代表构成项，a 1、a 2、a 3等代表系数；我们还假定a 1和a 2不满足该规律

$$a_1\,(1-a_1)=0,\quad a_2\,(1-a_2)=0;$$

但其他系数受所讨论的规律支配，因此我们有

$${a_3}^2=a_3,\ \&\mathrm{c}.$$

现在将方程(1)的两边各自相乘。结果将是

$$w={a_1}^2t_1+{a_2}^2t_2+\ \&\mathrm{c}. \tag{2}$$

This is evident from the fact that it must represent the development of the equation

$$w=V^2,$$

但也可以通过实际对(1)式平方，并观察到我们有

$${t_1}^2=t_1,\quad {t_2}^2=t_2,\quad t_1t_2=0,\ \&\mathrm{c}.$$

由成分的性质。现在从(1)中减去(2)，我们有

$$\left(a_1-{a_1}^2\right)t_1+\left(a_2-{a_2}^2\right)t_2=0.$$

Or,

$$a_1\,(1-a_1)\,t_1+a_2\,(1-a_2)\,t_2=0.$$

Multiply the last equation by t_1; then since $t_1t_2=0$, we have

$$a_1\,(1-a_1)\,t_1=0,\ \text{whence}\ t_2=0.$$

以同样方式将同一方程乘以t 2，我们得到

$$a_2\,(1-a_2)\,t_2=0,\ \text{whence}\ t_2=0.$$

因此可以一般地表明，任何系数不服从与记号本身相同的基本规律的构成项，都必须单独等于0。这种系数出现的通常形式是10_0。这是无穷大的代数记号。现在，任何数越接近无穷大(如果允许这种表达)，它就越偏离满足上述基本规律的条件。

记号00,其解释曾先前讨论过，并不必然违背我们在此考虑的规律，因为它同等地容许数值0和1。然而，其作为不定类记号的真正解释，我认为，除非依据类比，不能从其算术性质推出，而必须由经验确立。

12. 我们现在可以将所得的结果汇集为以下摘要：

第一，记号1作为展开式中某一项的系数，表示该成分所代表的整个类都应被采取。

第二，系数0表示该类中没有一个应被选取。

第三。记号00表示该类完全不确定的部分,即该类的成员中，取某些、没有或全部。第四。任何其他记号作为系数，表示以它作前缀的构成部分必须等于 0。

It follows hence that if the solution of a problem, obtained by development, be of the form

$$w = A + 0B + \frac{0}{0}C + \frac{1}{0}D,$$

该解可分解为以下两个方程，即，

$$w = A + vC, \tag{3}$$

$$D = O, \tag{4}$$

v是一个不确定的类记号。(3)的解释表明哪些元素进入或可能进入w的构成，即需要定义其定义的那个事物类；而(4)的解释表明原问题的元素之间存在哪些关系，完全独立于w。

这些就是解释的准则。可以补充说，它们在应用中是普遍的，并且它们的使用总是不会因例外或失败而受到妨碍。

13. 系。--若V是一个可独立解释的逻辑函数，它将满足符号规律，V(1 – V) = 0。所谓可独立解释的逻辑函数，我指的是无需预设其所含记号所代表的事物之间的任何关系即可解释的函数。因此x(1 – y)是可独立解释的，但x – y则不是。后一函数作为其解释的条件预设了：由y所代表的类完全包含于由x所代表的类之中；前一函数不蕴含任何此类要求。

现在，如果V可独立解释，并且如果w表示它所包含的个体的集合，那么方程w = V将成立，而不会导致V的展开式中任何成分消失；因为这种成分的消失将意味着V中记号所表示的事物类之间的关系。因此，V的展开式将具有以下形式

$$a_1 t_1 + a_2 t_2 + \&\mathrm{c}.$$

系数a ^{1}、a ^{2}等等，全都满足条件

$$a_1(1 - a_1) = 0, a_2(1 - a_2) = 0, \&c.$$

Hence by the reasoning of Prop. 4, Chap. v. the function V will be subject to the law

$$V(1 - V) = 0.$$

这个结果虽然从V被假定为表示一个类或事物的集合这一事实来看是`先验地明显的，但由此也可见它同样是从构成它的成分的性质中得出的。条件V(1 – V) = 0可以被称为“逻辑函数的可解释性条件”。

14. 在上一命题中展开的解或逻辑结论的一般形式，可以被称为“项之间的关系”。我像以前一样，使用“项”这个词来表示命题中由系词“是”或“是”连接的部分，无论是简单的还是复杂的。由各个记号所表示的事物类可以称为命题的元素。

15. 例1--重新采用“洁净兽”(VI.6)的定义，要求描述“不洁净兽”。

这里，如前所述，x代表“洁净兽”,y代表“分蹄的兽”,z代表“反刍的兽”，我们有

$$x = yz; \tag{5}$$

whence

$$1 - x = 1 - yz;$$

and developing the second member,

$$1 - x = y(1 - z) + z(1 - y) + (1 - y)(1 - z);$$

这可以解释为以下命题：不洁净兽是所有分蹄而不反刍的兽、所有反刍而不分蹄的兽，以及所有既不分蹄也不反刍的兽。

例2--给出同样的定义，要求描述不分蹄的兽。

由方程 x = yz 可得

$$y = \frac{x}{z};$$

therefore,

$$1 - y = \frac{z - x}{z};$$

and developing the second member,

$$1 - y = 0\,xz + \frac{-1}{0}x(1 - z) + (1 - x)z + \frac{0}{0}(1 - x)(1 - z).$$

这里，根据规则，系数为– 10的项，必须被分别等于0，由此我们有 —

$$1 - y = (1 - x)z + v(1 - x)(1 - z),$$
$$x(1 - z) = 0;$$

其中第一个方程通过解释给出命题：不分蹄的兽由所有反刍的不洁净兽，以及一个

不确定的剩余部分(某些、没有或全部)不反刍的不洁净兽组成。

第二个方程给出命题：没有不反刍的洁净兽。这是上文所提到的独立关系之一。我们寻求的是“不分开蹄的兽”与“洁净兽和反刍的兽”之间的直接关系。然而，恰好独立于与不分开蹄的兽的任何关系，凭借前提，在洁净兽与反刍的兽之间存在着一种单独的关系。这一关系也必然由该过程给出。

例3--让我们采用以下定义，即：“负责任的存在者是所有要么有行动自由、要么自愿牺牲其自由的有理性的存在者”，并对它应用前面的分析。

设代表有责任的存在者。

y	?	有理性的存在者。
z	?	那些有行动自由的人，那些自愿牺牲其行动自由的
w	?	人。

在这个定义的表述中，我将假定它所呈现的两个选项，即：“有行动自由的有理性的存在者”和“其行动自由已被自愿牺牲的有理性的存在者”，是相互排斥的，因此没有个体同时属于这两个部分。这将允许我们把这个命题逐字地解释为记号的语言，如下：

$$x = yz + yw. \tag{6}$$

让我们首先由此确定“有理性的存在者”与负责任的存在者、有行动自由的存在者以及其行动自由已被自愿放弃的存在者之间的关系。也许更好的说法是，我们希望以这样一种形式表达前提各元素之间的关系，使我们能够确定从负责任、行动自由、自愿牺牲自由及其反面可以推出多少理性。

由(6)我们得到

$$y = \frac{x}{(z+w)},$$

并展开第二项，但舍弃那些系数为
为0，

$$y = \frac{1}{2}xzw + xz(1-w) + x(1-z)w + \frac{1}{0}x(1-z)(1-w) + \frac{0}{0}(1-x)(1-z)(1-w),$$

由此，令系数为12和10的项等于0,我们有

$$y = xz(1-w) + xw(1-z) + v(1-x)(1-z)(1-w); \tag{7}$$

$$xzw = 0; \tag{8}$$

$$x(1-z)(1-w) = 0; \tag{9}$$

由此通过解释--

直接结论--有理性的存在者是所有要么有行动自由而未自愿牺牲其自由、要么没有行动自由而自愿牺牲了其自由的负责任的存在者，连同不负责任、没有自由且未自愿牺牲其自由的存在者的一个不确定的剩余部分(某些、没有或全部)。

第一个独立关系--没有负责任的存在者同时有行动自由并处于自愿牺牲其自由的状态。

第二个--没有负责任的存在者没有行动自由并同时处于然而，上面确定的独立关系可以用另一种

未曾牺牲其自由的状态。
而更为便利的形式。因此(8)给出

$$xw = \frac{0}{z} = 0z + \frac{0}{0}(1-z), \text{ on development;}$$

or,

$$xw = v(1-z); \tag{10}$$

并以同样的方式(9)给出

$$x(1-w) = \frac{0}{1-z} = \frac{0}{0}z + 0(1-z);$$

or,

$$x(1-w) = vz; \tag{11}$$

and (10) and (11) interpreted give the following Propositions:

1st. *Responsible beings who have voluntarily sacrificed their freedom are not free.*

2nd. *Responsible beings who have not voluntarily sacrificed their freedom are free.*

然而，这些仅仅是先前所确定的关系的不同形式。16. 在考察这些结果时，读者必须牢记，推论或分析方法的唯一职责，是确定那些由原命题中各项的联系所必然导致的关系。因此，在评估这一目标实现得是否完备时，我们与那些可能由所用各项的含义--有别于其表达出的联系--在我们心灵中提示的其他关系毫无干系。于是，似乎显而易见地可以指出，“那些

自愿牺牲其自由的人并不自由”，这是项的含义本身所蕴含的一种关系。因此，可能看来，该方法所指定的两个独立关系中的第一个，一方面是不必要地受限的，另一方面又是多余的。然而，若仅顾及原前提中各项的联系，就会看出所论及的关系并不应受这两种指责中的任何一种。该解答，如直接结论与独立关系合起来所表述的，是完全完备的，而绝非多余。

如果我们希望考虑上面提到的隐含关系，即“那些自愿牺牲其自由的人没有自由”，我们可以通过把这作为一个独立的命题来做到，其恰当表述将是

$$w = v(1 - z).$$

我们将不得不把这个方程与表达原始前提的方程一起使用。这种考察必须进行的方式将在未来一章中我们进入命题系统理论时出现。分析所得结果的唯一区别是，上面推导出的第一个独立关系被取代。

17. Ex. 4. – Assuming the same definition as in Example 2, let it be required to obtain a description of irrational persons.

We have

$$\begin{aligned} 1 - y &= 1 - \frac{x}{z + w} \\ &= \frac{z + w - x}{z + w} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}xzw + 0xz(1 - w) + 0x(1 - z)w - \frac{1}{0}x(1 - z)(1 - w)$$

+(1 – x) zw +(1 – x) z(1 – w) +(1 – x)(1 – z) w + ^{0} 0 $^{(1-x)(1=z)(1-w)}$ =(1 – x) zw +(1 – x) z(1 – w) +(1 – x)(1 – z) w + v(1 – x)(1 – z)(1 – w) =(1 – x) z +(1 – x)(1 – z) w + v(1 – x)(1 – z)(1 – w) ， 其中 xzw = 0 , x(1 – z)(1 – w) = 0。此处给出的独立关系与我们先前所得相同，正如它们显然应当相同，因为凡独立于某一给定对象类 y 的存在而成立的关系，也独立于相反类 1 – y 的存在而成立。

第一个方程所提供的直接解是：--非理性的人由所有要么有行动自由、要么自愿牺牲其自由而没有行动自由的不负责任的存在者，连同未牺牲其自由且没有行动自由的不负责任的存在者的一个不确定的剩余部分构成。

18. 本章所分析的命题属于被称为定义的那一种。我没有讨论任何一个其第二项或谓词项

是特称的，其一般形式为 Y = vX，其中 Y 与 X 是逻辑记号 x、y、z 等的函数，而 v 是一个不定类记号。此类命题的分析因消去记号 v 而大为便利(尽管这一步并非本质性的)，而这一过程依赖于下一章的方法。我还推迟考虑另一个重要问题，该问题对于完成单一命题的理论是必要的，但其分析实际上依赖于将命题系统化归的方法，而这一方法将在本书后面的篇幅中展开。

第七章

论消元法。

1. 在上一章讨论的例子中，原前提的所有元素都在结论中重新出现，只是顺序不同，连接方式也不同。但在通常的推理中，尤其是当我们有不止一个前提时，更常见的情况是某些元素被要求不出现在结论中。这样的元素，或通常所谓的“中项”，可以被视为仅仅为了帮助在其他元素之间建立那种连接而被引入原命题的，而那些其他元素才是被设计来进入结论的表达的。

2. 关于这样的中间元素或中项，流行着一些错误的观念。一种普遍的观点是--然而上一章所包含的例子却提供了反证--推论特别在于消去这样的项，并且这一过程的基本类型表现在从两个前提中消去一个中项，从而产生一个该中项不进入的单一结论。因此通常认为，三段论是一切推论的基础，或者是其共同类型，而推论无论其形式和结构多么复杂，都可以分解为一系列三段论。这一观点的恰当性将在后续一章中考虑。目前我希望提请注意逻辑体系(如用记号所表达的)与普通代数体系之间在消元问题上一个重要的、但迄今未被注意的差异点。在代数体系中，我们能够从两个方程中消去一个记号，从三个方程中消去两个记号，一般地，从n个方程中消去n – 1个记号。因此，在给定的独立方程数目与可能从中消去的量的记号的数目之间存在着确定的联系。但逻辑体系则不然。在表示命题或前提的给定方程的数目与能够被消去的典型记号的数目之间，不存在固定的联系。从一个单一方程中可以消去不定数目的这样的记号。另一方面，从不定数目的方程中，可能只消去一个类记号。我们可以断言，在这个独特的体系中，问题

的消元在所有情况下都同样可解。这是逻辑记号所服从的那种显著的对偶律的一个推论。在由给定前提所提供的方程之外，还添加了另一个方程或方程组，它来自思维规律本身，并为所讨论问题的解决提供了必要的手段。在对偶律所产生的许多推论中，这一点或许最值得注意。

3. 正如在代数中经常发生的那样，从给定的方程组中消去记号会导致仅仅形如0 = 0的恒等式，而不再有连接剩余记号的独立关系；同样，在逻辑体系中，也可能出现类似的结果，容许类似的解释。这种情况并不减损前述原则的普遍性。我们即将进入的方法，其目标是从任意数目的逻辑方程中消去任意数目的记号，并在结果中展示实际剩余的关系。然而，可能不存在这样的剩余关系。在这种情况下，方法的真理性通过引导我们得到一个仅仅同一的命题而显示出来。

4. 以下各命题中采用的记号与上一章类似。以f(x)表示任何含有逻辑记号x的表达式，无论是否含有其他逻辑记号。以f(1)表示当f(x)中的x变为1时该式所成为者；以f(0)表示同一函数当x变为0时所成为者。

命题一。

5. 若f(x)=0是任何含有类记号x的逻辑方程，无论是否含有其他类记号，则方程

$$f(1)f(0) = 0$$

为真，独立于x的解释；并且这将是上述方程中消去x的完整结果。换言之，从任意给定方程f(x) = 0中消去x，将通过在该方程中依次将x变为1、将x变为0，并将所得两个方程相乘来实现。类似地，从任意形如V = 0的方程中消去任意类记号x、y等的完整结果，将通过将该方程的第一项完全展开为给定记号的成分，并将所有这些成分的系数相乘，令乘积等于0来获得。

展开方程f(x)=0的第一端，我们有(V.10),

$$\begin{aligned} f(1)x + f(0)(1-x) &= 0; \\ \text{or, } [f(1) - f(0)]x + f(0) = 0. \therefore x &= \frac{f(0)}{f(0) - f(1)}; \\ \text{and } 1 - x &= -\frac{f(1)}{f(0) - f(1)}. \end{aligned}$$

将这些表达式代入基本方程中的x和1−x,

$$x(1-x)=0,$$

并且由此得出结果

$$-\frac{f(0)f(1)}{[f(0)-f(1)]^2}=0;$$
$$\text{or, } f(1)f(0)=0, \tag{1}$$

所需的形式。

6. 在这一过程中可以看出，消元实际上是在给定方程 f(x) = 0 与全称真方程 x(1 − x) = 0 之间进行的，后者表达了逻辑记号作为逻辑记号的基本规律。因此，为了使一个项的消元成为可能，并不需要多于一个前提或方程，因为必要的思维规律实际上提供了另一个前提或方程。而且，尽管这一结论的证明可以用其他形式展示，但由心灵本身所提供的同一元素仍然实际上在场。于是我们可以如下进行：

将(1)乘以x，我们得到

$$f(1)x=0, \tag{2}$$

并让我们借助普通代数的形式，从该方程与(1)中消去x。

现在，如果我们有两个形式如下的代数方程

$$ax+b=0,$$

$$a'x+b'=0;$$

众所周知，消去x的结果是

$$ab'-a'b=0 \tag{3}$$

But comparing the above pair of equations with (1) and (3) respectively, we find

$$a=f(1)-f(0), \quad b=f(0);$$
$$a'=f(1) \quad b'=0;$$

将其代入(4)中，得到

$$f(1)f(0)=0,$$

如前。在这种论证形式中，基本方程x(1−
x) = 0，出现在由(1)推导(3)的过程中。

7. 我将再补充另一种论证形式，它带有半逻辑的性质，或可使这一重要定理的论证更为清晰。

We have as before

$$f(1)x + f(0)(1-x) = 0.$$

Multiply this equation first by x, and secondly by $1-x$, we get

$$f(1)x = 0 \quad f(0)(1-x) = 0.$$

由这些，我们通过求解与展开，

$$f(1) = \frac{0}{x} = \frac{0}{0}(1-x), \text{ on development,}$$

$$f(0) = \frac{0}{1-x} = \frac{0}{0}x.$$

这些方程的直接解释是--

第一，凡包含于f(1)所表示的类中的个体，都不是x。

第二，凡包含于f(0)所表示的类中的个体，都是x。

因此，按普通逻辑，没有任何个体同时属于类f(1)和类f(0)，即没有任何个体属于类f(1)f(0)。因此，

$$f(1)f(0) = 0. \tag{4}$$

或者，只需将展开后的各方程相乘，结果便会立即得出。

8. 定理(5)为我们提供了以下规则：

从一给定方程中消去任何记号。规则--将方程的各项*(*必要时通过移项*)*移至第一端，依次给该记号以值*1*和*0*，并将所得各方程相乘。

该命题的第一部分现已得证。

9. 其次考虑一般方程

$$f(x, y) = 0;$$

the first member of which represents any function of x, y, and other symbols.

By what has been shown, the result of the elimination of y from this equation will be

$$f(x,1)f(x,0) = 0;$$

因为这就是我们通过在给定方程中依次将y变为1、将y变为0并将结果相乘所得到的形式。

再者，若在所得结果中依次将x变为1、将x变为0并将结果相乘，我们便得到

$$f(1,1)f(1,0)f(0,1)f(0,0) = 0; \tag{5}$$

作为消元的最终结果。但该方程第一端的四个因子，就是原方程第一端f(x,y)的完全展开式的四个系数；由此本命题的第二部分便显而易见了。

示例。

10. 例1--已给命题“所有人都是有死的”及其在方程中的记号表达式，

$$y = vx,$$

其中y表示“人”,x表示“有死的”，要求消去不定类记号v，并解释结果。

将各项移至第一边，我们得到

$$y - vx = 0.$$

当v=1时,这变为

$$y - x = 0;$$

而当v=0时，它变为

$$y = 0;$$

将这两个方程相乘，得到

$$y - yx = 0,$$

or $y(1-x) = 0$,
it being observed that $y^2 = y$.

The above equation is the required result of elimination, and its interpretation is, *Men who are not mortal do not exist*, – an obvious conclusion.

If from the equation last obtained we seek a description of beings who are not mortal, we have

$$x = \frac{y}{y},$$

$$\therefore 1 - x = \frac{0}{y}.$$

Whence, by expansion, $1 - x = \frac{0}{0}(1-y)$, which interpreted gives, *They who are not mortal are not men.* This is an example of what in the common logic is called conversion by contraposition, or negative conversion. [1]

Ex. 2.–Taking the Proposition, “No men are perfect,” as represented by the equation

$$y = v(1-x),$$

[1] Whately's Logic, Book II. chap. II. sec. 4.

其中y表示“人”,x表示“完善的存在者”，要求消去v，并从结果中得出对完善的存在者以及对不完善的存在者的描述。我们有

$$y - v(1 - x) = 0.$$

Whence, by the rule of elimination,

$$\{y - (1 - x)\} \times y = 0,$$

或

$$y - y(1 - x) = 0,$$

或

$$yx = 0;$$

它被解释为命题：完善的人不存在。由上述方程我们有

$$x = \frac{0}{y} = \frac{0}{0}(1 - y) \text{ by development;}$$

由此，通过解释，没有完美的人是凡人。同样，

$$1 - x = 1 - \frac{v}{y} = \frac{y}{y} = y + \frac{v}{0}(1 - y),$$

对其加以解释，便得出：不完善的存在者就是全部的人，外加一个不定剩余的非人的存在者。

11. 在处理命题时，通常最方便的做法是，首先消去不定类记号v，无论它出现在相应方程的何处。这只会改变方程的形式，而不损害其意义。让我们将此过程应用于第四章的一个例子。对于命题“没有既处于显赫地位又免于嫉妒之念的人”，我们得到表达式

$$y = v(1 - xz),$$

而对于等价的命题“处于显赫地位的人不免于嫉妒之念”，得到表达式

$$yx = v(1 - z);$$

并且已经指出，由于v是不定类记号，这些方程本身是等价的。为证明这一点，只需从每个方程中消去记号v。第一个方程是

$$y - v(1 - xz) = 0,$$

因此，先令v=1，再令v=0，并将结果相乘，我们便得到

$$(y-1+xz)y=0,$$
$$\text{or } yxz=0.$$

现在，给定方程中的第二个在移项后变为

$$yx-v(1-z)-0;$$
$$\text{whence } (x-1+z)yx=0,$$
$$\text{or } yxz=0,$$

和以前一样。读者将很容易解释这个结果。

12. 例3--作为本章一般方法的主题，我们将重提西尼尔先生对财富的定义，即："财富由可转移的、供给有限的、并且或者产生快乐或者防止痛苦的事物所构成。"依照先前的评述，我们将这一定义视为包含一切同时具有该定义最后一部分所表达的两项性质的事物，在此假定下，我们得到作为其代表方程的

$$w=st\{pr+p(1-r)+r(1-p)\},$$
$$\text{or } w=st\{p+r(1-p)\},$$

其中

w代表财富。s"供给有限的事物。t"可转移的事物。

p"产生快乐的事物。r"防止痛苦的事物。

由上述方程，我们可以消去任何我们不想考虑的记号，并按照任何给定的主词与谓词的安排，通过求解与展开来表达结果。

让我们首先考虑，如果消去涉及防止痛苦的元素r,w即财富的表达式会是什么。现在将方程的各项移至第一端，我们得到

$$w-st(p+r-rp)=0.$$

Making $r=1$, the first member becomes $w-st$, and making $r=0$ it becomes $w-stp$; whence we have by the Rule,

$$(w-st)(w-stp)=0 \tag{6}$$

或

$$w - wstp - wst + stp = 0; \tag{7}$$

由此

$$w = \frac{stp}{st + stp - 1};$$

the development of the second member of which equation gives

$$w = stp + \breve{\frac{0}{}}st(1-p). \tag{8}$$

由此我们得出如下结论--财富由一切供给有限的、可转移的、产生快乐的事物，外加一个不定剩余的供给有限的、可转移的、不产生快乐的事物所构成。这是足够明显的。

需要指出的是，为了确定 w 用其他记号表示的表达式，不必执行(7)中所示的乘法并将该方程化为(8)的形式。展开的过程在所有情况下都可以取代乘法的过程。因此，如果我们按 w 展开(7)，我们得到

$$(1 - sf)(1 - stp)w + stp(1 - w) = 0,$$

由此

$$w = \frac{stp}{stp - (1 - st)(1 - stp)};$$

而所推导出的这一方程将如前所述给出，

$$w = stp + \breve{\frac{0}{}}st(1-p).$$

13. 其次，假设我们寻求对供应有限之物的描述，将其视为依赖于它们与财富、可转移性以及产生快乐之倾向的关系，而省略一切关于防止痛苦的提及。

From equation (8), which is the result of the elimination of r from the original equation, we have

$$w - s\,(wt + wtp - tp) = 0;$$

whence

$$\begin{aligned} s &= \frac{w}{wt + wtp - tp} \\ &= wtp + wt\,(1-p) + \frac{1}{0}w\,(1-t)\,p + \frac{1}{0}w\,(1-t)\,(1-p) \\ &+0\,(1-w)\,tp + \frac{0}{0}\,(1-w)\,t\,(1-p) + \frac{0}{0}\,(1-w)\,(1-t)\,p \\ &+\frac{0}{0}\,(1-w)\,(1-t)\,(1-p)\,. \end{aligned}$$

我们将首先逐项给出上述解的直接解释；之后我们将提出它所暗示的一些一般性评论；最后，展示结论的表达式如何可以稍作简略。

那么，首先，直接解释是：供应有限之物由以下构成：全部可转移且产生快乐的财富--全部可转移但不产生快乐的财富--以及不定量的既非财富、但或者可转移而不产生快乐、或者不可转移而产生快乐、或者既不可转移也不产生快乐的东西。

对此，系数为10的项允许我们添加以下独立的关系，即：

1. 不可转让且能产生快乐的财富不存在。
2. 不可转让且不能产生快乐的财富不存在。

14. 关于这个解，我想以下评论很可能会被提出。

首先，可能会说，在上面得到的“供应有限之物”的表达式中，“全部可转移的财富”等项部分是多余的；因为一切财富(如原命题所隐含、并在独立关系中直接断定的那样)必然是可转移的。

我回答说，尽管在通常的言说中，如果我们的推理的另一部分已经引导我们表达出“没有不可转让的财富”这一结论，我们就不认为有必要在“财富”上添加“可转让的”这一修饰语，然而，这种方法之所以完善，正在于它在一切情况下都通过陈述每个项与我们选择采用的每一种区别性质或元素所保持的关系，来充分界定结论中每个项所表示的对象。这对于保持解答的不同部分真正彼此区分和独立是必要的，并且实际上防止了冗余。假设我们一直在考虑的那对项不包含“可转让的”一词，而合起来是“一切财富”，那么我们逻辑上就可以把单一的一项“一切财富”分解为两项：“一切可转让的财富”和“一切不可转让的财富”。但后一项被“独立关系”表明为消失。因此它不构成所需描述的一部分，因而就是冗余的。剩下的项与实际得到的结论一致。

通过逻辑划分不可能产生任何多余或冗余项的解答，可以称为纯解答。通过上述展开式和消元方法得到的一切解答都是如此。应当注意，如果在目前这一体系中该方法可能适用的情况下采用通常的代数的消元方法，我们就不能依赖所得到的解答的纯粹性。缺乏普遍性并不是它唯一的缺陷。

15. 其次，将会指出，结论包含两个项，它们的合计意义用一个单项来表达会更为方便。与其说“全部产生快乐且可转移的财富”和“全部不产生快乐且可转移的财富”，我们不如简单地说“全部可转移的财富”。这一评论完全公正。但必须注意，凡此类简化是可能的，它们就是

立即由我们所要解释的方程的形式所提示；而如果该方程被化为其最简形式，那么它所导出的解释也将同样处于其最简形式。因此，在原解中，系数为1的那些项 wtp 与 wt(1 – p)，相加后给出 wt；系数为10fortheircoefficient的那些项 w(1 – t) p 与 w(1 – t)(1 – p)，给出 w(1 – t)；而系数为00fortheircoefficient,give(1–w)(1–t).Whencethecompletesolution的那些项(1 – w)(1 – t) p 与(1 – w)(1 – t)(1 – p),

是

$$s = wt + \frac{0}{0}(1-w)(1-t) + \frac{0}{0}(1-w)\,t\,(1-p),$$

与独立关系，

$$w(1-t) = 0, \text{ or } w = \frac{0}{0}t.$$

现在的解释将如下所示：--1. 供给有限的物品由一切可转让的财富，连同非财富且不可转让之物、以及非财富且不能产生快乐的可转让物品的不定剩余组成。

第二，一切财富皆可转让。

这是该一般结论连同其附带条件所能采取的最简形式。

16. 当需要从一给定方程中消去两个或更多记号时，我们可以采用(6)命题I，或者依次消去它们，过程的次序无关紧要。从方程

$$w = st\,(p + r - pr),$$

我们已经消去了 r，并求得结果，

$$w - wst - wstp + stp = 0.$$

假设曾需要同时消去 r 和 t，那么以上述作为过程的第一步，尚需从最后的方程中消去 t。现在当 t = 1 时，该方程的第一项变为

$$w - ws - wsp + sp,$$

而当 t = 0 时，同一成员变为 w。由此我们得到

$$w\,(w - ws - wsp + sp) = 0,$$

or

$$w - ws = 0,$$

for the required result of elimination.

If from the last result we determine w, we have

$$w = \frac{0}{1-s} = \frac{0}{0}s,$$

由此得“一切财富都是供应有限的。”由于 p 不进入该方程，显然上述结论为真，与结论的各元素同“产生快乐”这一性质有何关系无关。

回到原方程，设需要消去 s 和 t。我们有

$$w = st(p + r - pr).$$

然而，与其按照规则分别消去 s 和 t，只需将 st 当作单一记号处理即可，因为由方程

$$st(1 - st) = 0.$$

Placing, therefore, the given equation under the form

$$w - st(p + r - pr) = 0;$$

and making st successively equal to 1 and to 0, and taking the product of the results, we have

$$(w - p - r + pr)w = 0,$$
$$\text{or } w - wp - wr + wpr = 0,$$

所寻求的结果。

作为一个具体例证，设需要推导出“产生快乐之物”(p)用“财富”(w)和“防止痛苦之物”(r)表示的表达式。

解此方程，我们得到

$$p = \frac{w(1-r)}{w(1-r)}$$
$$= \frac{0}{0}wr + w(1-r) + \frac{0}{0}(1-w)r + \frac{0}{0}(1-w)(1-r)$$
$$= w(1-r) + \frac{0}{0}wr + \frac{0}{0}(1-w).$$

由此得以下结论：--产生快乐之物是：全部不防止痛苦的财富，不定量的防止痛苦的财富，以及不定量的非财富之物。

由同一方程我们得到

$$1 - p = 1 - \frac{w(1-r)}{w(1-r)} = \frac{0}{w(1-r)},$$

其发展得出

$$w(1-p) = \frac{0}{0}wr + \frac{0}{0}(1-w)\cdot r + \frac{0}{0}(1-w)\cdot(1-r)$$
$$= \frac{0}{0}wr + \frac{0}{0}(1-w).$$

由此得，不产生快乐之物或者是财富、防止痛苦的，或者是非财富之物。

任何类似情形的讨论也同样容易。

17. 在消元的最后一个例子中，我们把复合记号 st 当作单一记号来处理，从而从给定方程中消去了它。同样的方法适用于任何满足个体记号基本规律的记号组合。因此，表达式 p + r – pr 在自乘时将重现自身，所以如果我们用单一记号如 y 来表示 p + r – pr，我们就将遵守基本规律，方程

$$y = y^2, \text{ or } y(1-y) = 0,$$

得到满足。因为记号的消元规则是建立在如下假定之上的：每个个别记号都服从该定律；因此，只要该函数满足该定律，从方程中消去此类记号的任何函数或组合，都可以通过一次运算完成。

尽管本章及前一章所采用的解释形式，或许比任何其他形式都更好地显示了记号 1 和 00,方式的表达更符合于那些属于日常话语的直接意义，但同样真实而恰当的方式也可以被采用。于是方程(9)可以按如下方式解释：财富要么是供给有限、可转让并产生快乐的，要么是供给有限、可转让但不产生快乐的。反过来，凡供给有限、可转让并产生快乐的东西，都是财富。当最终的展开式引入系数为 unity 的项时，类似于上述的反向解释总是会随之给出。

18. 注--基本方程 f(1) f(0) = 0，表达从任何方程 f(x) = 0 中消去记号 x 的结果，容许一种值得注意的解释。

应当记住，方程 f(x) = 0 隐含了某个命题，其中由类 x(假定为“men”)所代表的个体被提及，并且可能与其他个体一起被提及；而我们的目标是确定该命题中是否隐含了其他个体之间的某种关系，独立于类*men*中所发现的那些个体。现在，方程 f(1) = 0 表达了如果*men*构成了全集，原命题会变成什么；方程 f(0) = 0 表达了如果 men 不复存在，原命题会变成什么；因此方程 f(1) f(0) = 0 表达了凭借原命题将会是

在任一假定下同样为真，即在“人”是“一切事物”或“无”的情况下同样为真。因此该定理表达的是：无论某一给定类别的对象是囊括整个论域还是从存在中消失都同样为真者，完全独立于该类别，反之亦然。在此我们看到又一个例子，说明如何将直接由思维的数学规律推导出的形式结果解释为哲学的一般公理。

第八章

论命题系统的化简。

1. 在前几章中，我们已经为最本质的目的充分确定了单一原始命题的理论，或者更准确地说，是由单一方程所表达的原始命题的理论。并且我们已在该理论之上建立了一种充分的方法。我们已经表明，如何消去给定方程组中所涉及的任一元素，并以任何所要求的形成--无论是否定、肯定，还是更常见的主词与谓词的关系--推出连接其余元素的关系。接下来，我们着手考察命题系统，并对它们进行一系列类似的探究。我们要问：是否可能从表达一个命题系统的那些方程中，随意地消去任意数目的所涉记号；通过对结果的解释推出其余记号之间所隐含的全部关系；并特别确定任一单个元素、或元素的任一可解释组合，用其他元素表示的表达式，从而以任何可能要求的可容许形式呈现结论。这些问题将通过表明以下一点来回答：可以将任何方程组、或一个系统中所涉及的任何方程，化为一个等价的单一方程，而前几章的方法可直接应用于该方程。还将看到，在这一化归中涉及单一命题理论的一项重要扩展，而这一扩展是我们在先前对该主题的讨论中不得不放弃的。这种情况在性质上并不特殊。科学中有许多特殊部门不能从内部得到完整的考察，而还需要从外部观点加以研究，并与其他同类主题联系起来加以看待，以便理解它们的全貌。

本章将展示两种把方程组化为等价的单一方程的不同方式。第一种方式依赖于使用任意常数乘数。它在理论上足够简单，但有一个不便之处，即使得随后出现的消元和展开过程变得相当冗长。然而，它是最早发现的

化归方法，部分出于这一原因，部分出于其简单性，人们认为保留它是适当的。第二种方法不需要引入任意常数，并且在几乎所有方面都优于前一种。因此，在本著作随后的研究中将普遍采用它。

2. 我们 proceed 到第一种方法的考虑。

命题一。

任何逻辑方程组都可以化为一个等价的单一方程，方法是将第一个方程之后的每个方程乘以一个不同的任意常数，并将所有结果连同第一个方程一起相加。根据第六章命题 2，任何单一方程 f(x, y..) = 0 的解释，是通过将第一项展开式中系数不为零的那些成分等于0而获得的。因此，如果给定两个方程 f(x, y..) = 0 和 F(x, y..) = 0，它们的联合含义将包含在由以下方式形成的结果系统中：将按第六章规则展开的给定方程中在两者或任一者中如此呈现的所有那些成分等于0。于是，假设我们有两个方程

$$xy - 2x = 0, \tag{1}$$

$$x - y = 0; \tag{2}$$

The development of the first gives

$$-xy - 2x(1 - y) = 0;$$

$$\text{whence, } xy = 0, x(1 - y) = 0. \tag{3}$$

The development of the second equation gives

$$x(1 - y) - y(1 - x) = 0;$$

$$\text{whence, } x(1 - y) = 0, y(1 - x) = 0. \tag{4}$$

The constituents whose coefficients do not vanish in both developments are xy, $x(1 - y)$, and $(1 - x)y$, and these would together give the system

$$xy = 0, x(1 - y) = 0, (l - x)y = 0; \tag{5}$$

这等价于分别由展开式给出的两个方程组，因为在这些方程组中方程 x(1 – y) = 0 被重复。将我们限制在二元方程组的情形，那么剩下的就是确定一个单一方程，它在展开时将与

coefficients which do not vanish, as the given equations produce. Now if we represent by

$$V_1 = 0, V_2 = 0,$$

给定的方程，V [1]和 V [2]是逻辑记号 x, y, z， 等的函数；那么单一方程

$$V_1 + cV_2 = 0, \tag{6}$$

c 为任意常数，将实现所需的目标。因为设 At 表示完整展开式 V 中的任一项，其中 t 是一个成分而 A 是其数值系数，并设 Bt 表示 V [2]的完整展开式中的对应项，那么(6)的展开式中的对应项将是

$$(A + cB)t.$$

若 A 和 B 同时为零，则 t 的系数消失，否则不然。因为如果我们假定 A 和 B 不同时为零，同时使

$$A + cB = 0, \tag{7}$$

则只有以下情形可能出现。第一。A 为零而 B 不为零。在此情形下上述方程变为

$$cB = 0,$$

并且要求 c = 0。但这与 c 是任意常数的假说相矛盾。

第二，B 消失而 A 不消失。这一假定化简为(7)
到

$$A = 0,$$

由此该假定本身即被违反。

第三，A与B均不消失。此时方程(7)给出

$$c = \frac{-A}{B}$$

这是一个确定的值，因此与 c 是任意的这一假说相冲突。

因此，系数 A + cB 在 A 和 B 两者都消失时消失，但在其他情况下则不消失。因此，同样的成分将出现在(6)的展开式中，其系数不消失，正如在方程 V [1] = 0 , V [2] = 0 中那样，单独地或一起地。而方程 V [1] + cV [2] = 0，将等价于系统 V [1] = 0 , V [2] = 0。

由类似的推理可知，一般的方程组

$$V_1 = 0, V_2 = 0, V_3 = 0, \ \&c.;$$

可用单一方程代替

$$V_1 + cV_2 + c'V_3 + \ \&\mathrm{c.} = 0\,,$$

c, c′ ，等等，为任意常数。如此形成的方程可以在一切方面当作前几章的普通逻辑方程来处理。任意常数 c 1 , c 2等等，不是逻辑的记号。它们不满足那条规律，

$$c_1(1-c_1) = 0, c_2(1-c_2) = 0\,.$$

但它们的引入由那条一般原则所证明，该原则已在(II.15)和(V.6)中陈述，并在我们其后几乎所有的研究中得到例示，即：涉及逻辑记号的方程可以在一切方面当作那些记号是量的记号来处理，服从特殊规律 x(1 – x) = 0，直到在求解的最后阶段它们采取一种可在逻辑所熟悉的那套思想体系中解释的形式。

3. 下例将用以说明上述方法。

例1。--假设对某一类物质的性质的分析导致了以下一般结论，即：

第一，凡性质 A 与 B 相结合之处，或者性质 C，或者性质 D，也出现；但它们不是共同出现。

第二，凡性质 B 与 C 相结合之处，性质 A 与 D 或者都与它们一同出现，或者都一同不出现。

第三，凡性质 A 与 B 都不出现之处，性质 C 与 D 也都一同不出现；反之，凡性质 C 与 D 都不出现之处，A 与 B 也都一同不出现。

于是要求从上述结论出发，就性质 A 的出现，判定在任一特殊情形下关于性质 B 与 C 的出现或不出现可以得出什么结论，而不顾及性质 D。

用x表示性质A;

” 性质 B 用 y 表示；” 性质 C 用 z 表示；” 性质 D 用 w 表示。

那么，前提的符号表达式将是

$$xy - v(w(1-z) + z(1-w)); yz = v(xw + (1-x)(1-w)); (1-x)(1-y) = (1-z)(1-w).$$

从这些方程的前两个中，分别消去不定类记号 v，我们得到

$$xy(1 - w(1-z) - z(1-w)) = 0;$$
$$yz(1 - xw - (1-x)(1-w)) = 0.$$

Now if we observe that by development

$$1 - w(1-z) - z(1-w) = wz + (1-w)(1-z),$$

且

$$1 - xw - (1-x)(1-w) = x(1-w) + w(1-x),$$

and in these expressions replace, for simplicity,

$$1 - xby\bar{x}, 1 - yby\bar{y}, \&c.,$$

we shall have from the three last equations,

$$xy(wz + \bar{w}\bar{z}) = 0; \tag{1}$$
$$yz(x\bar{w} + \bar{x}w) = 0; \tag{2}$$
$$\bar{x}\bar{y} = \bar{w}\bar{z}; \tag{3}$$

而我们必须从这一系统中消去w。

将上述方程的第二个乘以 c，第三个乘以 c′，并将结果加到第一个上，我们得到

$$xy(wz + \bar{w}\bar{z}) + cyz(x\bar{w} + \bar{x}w) + c'(\bar{x}\bar{y} - \bar{w}\bar{z}) = 0.$$

When w is made equal to 1, and therefore $\bar{w}$ to 0, the first member of the above equation becomes

$$xyz + c\bar{x}yz + c'\bar{x}\bar{y}.$$

而当在同一成员中令 w 为 0 且 w = 1 时，它变为

$$xy\bar{z} + cxyz + c'\bar{x}\bar{y} - c'\bar{z}.$$

Hence the result of the elimination of w may be expressed in the form

$$(xyz + c\bar{x}yz + c'\bar{x}\bar{y})(xy\bar{z} + cxyz + c'\bar{x}\bar{y} - c'\bar{z}) = 0; \tag{4}$$

and from this equation x is to be determined.

倘若我们现在像先前诸例中那样进行，我们就应当把上述方程第一个成员中的各因子相乘；但最好表明这样一种做法完全不必要。让我们就 x--其表达式正被寻求的那个记号--来展开(4)的第一个成员，我们得到

$$yz(y\bar{z} + cyz - c'\bar{z})x + (cyz + c'\bar{y})(c'\bar{y} - c'z)(1-x) = 0;$$
$$\text{or, } cyzx + (cyz + c'\bar{y})(c'\bar{y} - c'\bar{z})(1-x) = 0;$$

whence we find,

$$x = \frac{(cyz + c'\bar{y})(c'\bar{y} - c'\bar{z})}{(cyz + c'\bar{y})(c'\bar{y} - c'\bar{z}) - cyz};$$

and developing the second member with respect to y and z,

$$x = 0yz + \frac{0}{0}y\bar{z} + \frac{c'^2}{c'^2}\bar{y}z + \frac{0}{0}\bar{y}\bar{z};$$

或者，

$$x = (1-y)\,z + \frac{\upsilon}{0} y\,(1-z) + \frac{\upsilon}{0}\,(1-y)\,(1-z)\,;$$

或者，

$$x = (1-y)\,z + \frac{0}{0}\,(1-z)\,;$$

其解释是，凡该性质出现之处，那里或者出现且不出现，或者不出现。并且反过来，凡该性质出现、而该性质不出现之处，那里该性质出现。

这些结果可以通过下面即将说明的方法更为容易得多地得到。然而，拥有不同的方式以达到同一结论、并用以相互验证，是令人满意的。

4. 我们接着讨论第二种方法。

命题二。

若任何方程， V ^{1} = 0 , V ^{2} = 0 , & c.，是这样的，即其第一个成员的展开式只由具有正系数的成分组成，则那些方程可以通过相加而结合成一个单一的等价方程。

因为，如前所述，令 At 表示函数 V ^{1}的展开式中的任一项，Bt 表示 V ^{2}的展开式中的对应项，依此类推。那么方程

$$V_1 + V_2 + \&\mathrm{c.} = 0, \tag{1}$$

由几个给定方程相加而成的，是

$$(A + B + \&\mathrm{c.})\,t.$$

但根据假说，系数 A、B 等均非否定，因此在导出方程中的总系数 A + B 等仅当各别系数 A、B 等一同消失时才会消失。因此，在方程(1)的展开式中出现的元素将与原系统各方程 V ^{1} = 0、V ^{2} = 0 等合并考虑时出现的元素相同，因此方程(1)的解释将等价于其所导出的各方程之集合解释。

命题三。

5. 若 V ^{1} = 0 , V ^{2} = 0 , & c.表示任一方程组，其各项已经过移项而被置于相同的第一个边，则该组的联合解释将包含在单一方程中，

$$V_1^2 + V_2^2 + \&c. = 0,$$

由给定各方程的平方相加而成。

因为令该组中任一方程，如 V ^{1} = 0，在展开时产生一个方程

$$a_1t_1 + a_2t_2 + \&c. = 0$$

其中 t ^{1} , t ^{2} , & c.是成分，而 a ^{1} , a ^{2} , & c.是它们对应的系数。那么方程 V ^{21} = 0 在展开时将产生一个方程

$$a_1^2t_1 + a_2^2t_2 + \&c. = 0,$$

这可以由展开式的规律来证明，或者通过将函数 a ^{1} t ^{1} + a ^{2} t ^{2} ， 与 c.在服从这些条件的情况下平方来证明

$$t_1^2 = t_1,\, t_2^2 = t_2,,\, t_1t_2 = 0$$

已在第 v 章命题 3 中指定。因此，出现在方程 V $^{21=0,}$的展开式中的成分与出现在方程 V ^{1} = 0 的展开式中的那些成分相同，并且它们具有正系数。同样的评述适用于方程 V ^{2} = 0 ， 与 c.。因此，根据上一个命题，方程

$$V_1^2 + V_2^2 + \&c. = 0$$

在解释上等同于方程组

$$V_1 = 0,\, V_2 = 0,\, \&\mathrm{c}.$$

系定理。--任何方程，V = 0，其第一个成员已经满足条件

$$V^2 = V, \text{ or } V(1 - V) = 0,$$

不需要(因为它将不受其影响)平方的过程。这样的方程确实可以立即展开为一系列成分，其系数等于 1，见第 v 章命题 4。

命题四。

6. 凡一个组的方程已通过上述平方过程、或通过任何其他过程，被化归为这样一种形式，使得在其展开式中显示出来的所有成分都具有正系数，则通过消元得到的任何导出方程都将具有同样的性质，并可以通过相加与其他方程结合。

假设我们必须从任一方程 V = 0 中消去一个记号 x，该方程是这样的，即在其第一个成员的完整展开式中，没有任何成分具有负系数。那个展开式可以写成如下形式

$$V_1x + V_0(1 - x) = 0$$

V ^{1}和 V ^{0}各自具有以下形式

$$a_1t_1 + a_2t_2 ... + a_nt_n,$$

其中 t 1 t 2 ...t n 是其他记号的成分，而 a 1 a 2 ...a n 在每一情形下都是正量或消失量。消元的结果是

$$V_1 V_2 = 0;$$

并且由于 V 1与 V 2中的系数没有一个是负的，所以在乘积 V 1 V 2中不可能有负系数。因此方程 V 1 V 2 = 0 可以加到任何其他方程上，只要其成分的系数是正的，而所得方程将结合那些据以得到它的方程的全部意义。

命题五。

7. 从先前诸命题推导出一条实用的规则或方法，用以化归在逻辑中表达命题的方程组。

我们已通过先前的研究确立了以下几点，即：第一，任何形如 V = 0 的方程，其中 V 满足对偶性的基本规律 V (1 –V) = 0，都可以通过简单相加而结合在一起。第二，任何其他形如 V = 0 的方程，都可以通过平方的过程化为一种形式，在其中同样的仅凭相加而结合的原则是适用的。那么，剩下的就只是确定在命题的实际表达中，哪些方程属于前一类，哪些属于后一类。现在，命题的一般类型已在第四章的结论中阐明。它们所代表的命题划分如下：第一，主词为全称而谓词为特称的命题。

符号类型(IV.15)为

$$X = vY,$$

X 与 Y 满足二重性规律。消去 v，我们得到

$$X(1 - Y) = 0, \tag{1}$$

并且这也将被发现满足同一规律。无需再通过平方过程进行进一步化简。第二，两项均为全称的命题，其符号类型为

$$X = Y,$$

X 与 Y 分别满足二重性规律。将方程写成形式 X – Y = 0，并平方，我们得到

$$\begin{gathered} X - 2XY + Y = 0, \\ \text{or, } X(1 - Y) + Y(1 - X) = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

此方程的第一个成员满足对偶律，这从其形式本身即可明显看出。

我们可以用另一种方式得到同一个方程。方程

$$X = Y$$

等价于以下两个方程

$$X = vY,\ Y = vX,$$

(for to affirm that X's are identical with Y's is to affirm both that All X's are Y's, and that All Y's are X's). Now these equations give, on elimination of v,

$$X(1-Y) = 0,\ Y(1-X) = 0,$$

which added, produce (2).

3rd. Propositions of which both terms are particular. The form of such propositions is

$$vX = vY,$$

但 v 并非完全任意，因此不应被消去。因为 v 是某个的代表，它虽然可以在其含义中包括全部，但不包括无。因此我们必须将第二个成员移到第一边，并按照规则对所得方程进行平方。结果显然将是

$$vX(1-Y) + vY(1-X) = 0.$$

The above conclusions it may be convenient to embody in a Rule, which will serve for constant future direction.

8. RULE.— *The equations being so expressed as that the terms X and Y in the following typical forms obey the law of duality, change the equations*

$$X = vY \text{ into } X(1-Y) = 0,$$

$$X = Y \text{ into } X(1-Y) + Y(1-X) = 0.$$

$$vX = vY \text{ into } vX(1-Y) + vY(1-X) = 0.$$

任何以形式 X = 0 给出的方程将不需要变换，而任何以形式 X = 1 呈现的方程都可以替换为 1 – X = 0 ，这从上述第二个变换中可以看出。当系统的方程被如此化简后，其中任何一个，以及通过消元过程从它们导出的任何方程，都可以通过相加来组合。

9.注意。--在第四章中已经看到，在将命题的项字面翻译为记号语言而不注意其真实含义时，我们可能产生其中项 X 和 Y 不遵守对偶律的方程。在所指章节的命题3的(3)中给出的方程 w = st(p + r) 就属于这种类型。然而，这样的方程，正如已经看到的，

是有含义的。如果出于好奇或任何其他动机决定使用它们，最好按照规则(VI.5)对它们进行化简。

10. 例2--让我们取以下初等几何的命题：

1. 相似图形由所有对应角相等且
其对应边成比例。

第二。对应角相等的三角形，其对应
边成比例，且反之亦然。

为表示这些前提，让我们令 s = 相似的。t = 三角形。q = 对应角相等。r = 对应边成比例。

于是，前提由以下方程表示：

$$s = qr, \tag{1}$$
$$tq = tr. \tag{2}$$

按照规则化简，或者，与此相同，将这些方程的项移到第一边，对每个方程平方，然后相加，我们得到

$$s + qr - 2qrs + tq + tr - 2tqr = 0. \tag{3}$$

设要求推导出由项三角形、对应角相等、对应边成比例所表达的元素构成的非相似图形的描述。

由(3)可得，

$$s = \frac{tq + qr + rt - 2tqr}{2qr - 1},$$
$$\therefore 1 - s = \frac{qr - tq - rt + 2tqr - 1}{2qr - 1}. \tag{4}$$

And fully developing the second member, we find

$$\begin{aligned} 1 - s = {} & 0tqr + 2tq(1-r) + 2tr(1-q) + t(1-q)(1-r) \\ & + 0(1-t)qr + (1-t)q(1-r) + (1-t)r(1-q) \\ & + (1-t)(1-q)(1-r). \end{aligned} \tag{5}$$

在上述展开式中，有两项的系数为2，这些必须按照规则等于0，然后那些系数为0的项被舍弃，我们得到

$$\begin{aligned} 1 - s = {} & t(1-q)(1-r) + (1-t)q(1-r) + (1-t)r(1-q) \\ & + (1-t)(1-q)(1-r); \end{aligned} \tag{6}$$
$$tq(1-r) = 0; \tag{7}$$
$$tr(1-q) = 0; \tag{8}$$

其直接解释是

1. 不相似的图形包括所有对应角不相等且边不成比例的三角形，以及所有不是三角形但其角相等而边不成比例，或对应边成比例而角不相等，或对应角既不相等且对应边也不成比例的图形。

2. 不存在对应角相等而边不成比例的三角形。

3. 不存在对应边成比例而角不相等的三角形。

11. 以上就是最终方程的直接解释。可以看出，按照一般理论，在根据原前提的某些其他元素推演出对某一特定类对象(即不相似图形)的描述时，我们同时也获得了那些元素之间凭借同一前提而存在的独立关系。而且，即使就眼前的研究对象而言，这也不是多余的信息，这一点很容易表明。例如，独立关系总是可以被用来--如果认为可取的话--将直接寻求的那种关系的表达式化为更简短的形式。因此，如果我们把(7)写成如下形式

$$0 = tq(l - r),$$

将其加到(6)上，我们得到，因为

$$\begin{aligned} t(1-q)(1-r) + tq(1-r) &= t(1-r), \\ 1 - s = t(1-r) + (1-t)q(1-r) + (1-t)r(1-q) & \\ +(1-t)(1-q)(1-r), & \end{aligned}$$

这在解释时，将给出非相似图形描述的第一项为“对应边不成比例的三角形”，而不是最初获得的更完整的描述。对便利性的考虑必须始终决定这种化简是否恰当。

12.一种总是有利的化简(VII.15)在于将所寻求的直接描述的项，如(5)或(6)的第二个成员的项，收集成尽可能少的组。因此，(6)的第二个成员的第三项和第四项通过相加产生单项(1 – t)(1 – q)。如果将此化简与上一次化简结合，我们得到

$$1 - s = t(1-r) + (1-t)q(1-r) + (1-t)(1-q),$$

the interpretation of which is

非相似图形由所有对应边不成比例的三角形，以及所有不是三角形但对应角不相等，或对应角相等但边不成比例的图形组成。

因此，一般解的充分性并非多余。它在给我们提供我们所寻求的全部信息的同时，也为我们提供了以最有利的方式表达该信息的手段。

13. 还有一点观察需要作出，它说明了一条已经陈述过的原则。在(5)中 1 – s 的完整展开式里，有两项以 2 为系数，而不是[10]。这一点将在以后被表明，即这种情况表明两个前提并非独立。为验证这一点，让我们重新列出各前提的约化形式方程，即，

$$\begin{aligned} s(1-qr)+qr(1-s) &= 0, \\ tq(1-r)+tr(1-q) &= 0. \end{aligned}$$

现在，如果这些方程的第一个成员有任何共同的成分，它们将在方程相乘时出现。如果我们这样做，我们得到

$$stq(1-r)+str(1-q)=0.$$

由此将得出

$$stq(1-r)=0,\ str(1-q)=0,$$

这些是可以从任一原始方程导出的方程。它们的解释是--

对应角相等的相似三角形具有其
对应边成比例。
对应边成比例的相似三角形具有其
同位角相等。

而这些结论同样可以从任一前提单独导出。在这方面，根据所规定的定义，这些前提不是独立的。

14.最后，让我们重新讨论为说明本章第一种方法而讨论的问题，并努力通过当前方法确定，从性质 C 的存在可以就性质 A 和 B 得出什么结论。

我们消去符号v后得到以下方程，即：

$$xy(wz+\bar{w}\bar{z})=0, \tag{1}$$
$$yz(x\bar{w}+\bar{x}w)=0, \tag{2}$$
$$\bar{x}\bar{y}=\bar{w}\bar{z}. \tag{3}$$

从这些中我们要消去 w 并确定 z。现在(1)和(2)已经满足条件 V(1 – V) = 0。第三个方程在将
将各项移至第一边，然后平方

$$\bar{x}\bar{y}(1-\bar{w}\bar{z})+\bar{w}\bar{z}(1-\bar{x}\bar{y})=0. \tag{4}$$

将(1)(2)与(4)相加，我们得到

$$xy(wz+\bar{w}\bar{z})+yz(x\bar{w}+\bar{x}w)+\bar{x}\bar{y}(1-\bar{w}\bar{z})+\bar{w}\bar{z}(1-\bar{x}\bar{y})=0.$$

消去w，我们得到

$$(xyz + yz\bar{x} + \bar{x}\bar{y})\{xy\bar{z} + yzx + \bar{x}\bar{y}z + \bar{z}(1 - \bar{x}\bar{y})\} = 0.$$

现在，将第二个因子中的项与第一个因子中的项依次相乘，注意到

$$x\bar{x} = 0,\ y\bar{y} = 0,\ z\bar{z} = 0,$$

几乎全部消失，我们只剩下

$$xyz + \bar{x}\bar{y}z = 0; \tag{5}$$

由此

$$z = \frac{0}{xy + \bar{x}\bar{y}}$$
$$= 0xy + \frac{0}{0}x\bar{y} + \frac{0}{0}\bar{x}y + 0\bar{x}\bar{y}$$
$$= \frac{0}{0}x\bar{y} + \frac{0}{0}\bar{x}y,$$

提供了解释。凡发现该性质之处，将同时发现该性质或该性质，但不会两者同时被发现。

由方程(5)，我们可以容易地推出前次研究中通过任意常数乘数方法所得的结果，以及所提出的x、y与z之间关系的任何其他形式；例如，如果该性质不存在，那么要么与将共同存在，要么将不存在。反之，如果与共同存在，将不存在。本结论的逆部分建立在 y的展开值中存在一个系数为一的项xz这一事实之上。

第九章

论某些简略方法。

1.尽管前几章所建立并阐明的展开、消元与归约这三种基本方法足以满足逻辑学的一切实际目的，然而在某些情况下，它们--尤其是消元方法--可以在重要程度上得到简化；本章我想提请注意这些情况。我将首先证明一些包含上述简化方法原理的命题，然后再将它们应用于具体例子。

让我们把满足基本法则V(1 – V) = 0的任何项称为类项。这样的项各自将是成分；但当它们一起出现时，并不像展开式的项那样必然在每一项中涉及相同的记号。因此，ax + bxy + cyz可以描述为一个由三个类项x、xy和yz分别乘以系数a、b、c所组成的表达式。以下两个命题中所应用的原理，在某些情况下大大缩短了消元过程，那就是舍弃多余类项的原理；那些不增加最终结果的成分的类项被视为多余。

命题一。

2. 从任何方程 V = 0 ，其中由一系列具有正系数的类项组成，我们被允许拒绝任何以另一项为因子的项，并将每个正系数变为一。

因为这系列正项的意义仅取决于其最终展开式，即其关于所涉及的所有记号的展开式的成分的数目和性质，而完全不取决于系数的实际值(VI.5)。现在令 x 为该系列中的任一项，xy 为任何其他以 x 为因子的项。x 关于记号 x 和 y 的展开式将是

$$xy + x\,(1 - y)\,,$$

and the expansion of the sum of the terms x and xy will be

$$2xy + x\,(1 - y)\,.$$

但根据已所述，这些表达式出现在一个方程的第一个成员中，该方程的第二个成员为 0，且其第一个成员的所有系数为正，它们是等价的；因为在最终展开式中必定仅存在两个成分 xy 和 x(1 – y)，由此将仅产生结果方程

$$xy = 0,\, x\,(1 - y) = 0.$$

因此，项的聚合 x + xy 可以用单项 x 替换。

同样的推理适用于该命题中所考虑的所有情况。因此，如果项 x 被重复，聚合 2 x 可以用 x 替换，因为在这种情况下，方程 x = 0 必定出现在最终化简中。

命题二。

3. 在消元过程中，每当我们必须将两个因子相乘，而每个因子都仅由正项组成并满足逻辑记号的基本定律时，允许从两个因子中舍弃任何共同的项，或从任一因子中舍弃任何可被另一因子中的项整除的项；但始终须将所舍弃的项加到所得因子的乘积上。

在本命题的表述中，“可整除”一词是一个方便用语，用于代数意义，在此意义下，xy 和 x(1 – y) 被称为可被 x 整除。

为使本命题的含义更加清楚，设相乘的因子为x + y + z和x + yw + t。于是可以断言，我们可以从这两个因子中舍弃项x，并且可以从第二个因子中舍弃项yw，只要把这些项转移到最终乘积中。因此，所得因子为y + z和t，若在其乘积yt + zt上加上项x和yw，我们便得到

$$x + yw + yt + zt,$$

作为一个表达式，它等价于给定因子 x + y + z 与 x + yw + t 的乘积；即在消元过程中等价。

让我们首先考虑两个因子有一个共同项 x 的情形，并用表达式 x + P、x + Q 表示这两个因子，假定在一种情形下 P、在另一种情形下 Q 是附加于 x 的正项之和。

现在，

$$(x + P)(x + Q) = x + xP + xQ + PQ. \tag{1}$$

但消元过程在于将某些因子相乘，并令结果等于 0。那么，或者上述方程的第二边须等于 0，或者它是某个须等于 0 的表达式的因子。

若采取前一种选择，那么根据上一命题，我们允许舍弃项 xP 和 xQ，因为它们是以另一项 x 为因子的正项。所得表达式为

$$x + PQ,$$

这正是我们通过从两个因子中舍弃 x 并将其加到剩余因子的乘积上所应得到的结果。

采取第二种选择时，(1) 的第二边能够影响消元的最终结果的唯一方式，必定取决于其构成项的数量和性质，而这两个要素都不受舍弃项 xP 和 xQ 的影响。因为 x 的那个展开式包含以 x 为因子的所有可能的构成项。

Consider finally the case in which one of the factors contains a term, as xy, divisible by a term, x, in the other factor.

Let $x + P$ and $xy + Q$ be the factors. Now

$$(x + P)(xy + Q) = xy + xQ + xyP + PQ.$$

但根据上一命题的推理，项 xyP 可以作为包含另一正项 xy 为因子而被舍弃，由此我们得到

$$\begin{aligned} & xy + xQ + PQ \\ = & xy + (x + P)Q. \end{aligned}$$

但这表达的是从第二个因子中舍弃项 xy，并将其转移到最终乘积中。因此本命题是显然的。

命题三。

4. 若是从任何方程组中消去任何其他记号后保留在最终结果中的任何记号，则这种消元的结果可以表示为如下形式

$$Et + E\,(1 - t) = 0,$$

其中是通过在所给系统中 t = 1 并消去同样的其他记号而形成的；而是通过在所给系统中 t = 0 并消去同样的其他记号而形成的。

For let $\phi\,(t) = 0$ represent the final result of elimination. Expanding this equation, we have

$$\phi\,(1)\,t + \phi\,(0)\,(1 - t) = 0.$$

现在，无论我们通过什么过程从所给方程组推出函数 φ(t)，我们都应通过同一过程推出 φ(1)，如果在那些方程中 t 被变为 1；并且我们应通过同一过程推出 φ(0)，如果在同样的方程中 t 被变为 0。由此本命题的真理性是显然的。

5.关于最后所证明的三个命题，可以指出，尽管它们对于一般理论的严格展开或应用完全无关紧要，然而它们却实现了具有实际性质的重要目的。通过命题1，我们可以简化加法的结果；通过命题2，我们可以简化乘法的结果；通过命题3，我们可以把任何冗长的消元过程分解为两个不同的过程，而这两个过程一般具有小得多的复杂性。当研究的最终目的是在消元之后所留下的其他记号中确定t的值时，这种方法将被非常频繁地采用。

6. 例1。--亚里士多德在《尼各马可伦理学》第二卷第三章中，已经确定行为之所以为有德，并非因其自身具有某种性质，而是因为行为者具有某种心灵状态，即他明知而为、出于审慎的抉择、为其自身之故、并依据固定的行为原则而行；随后他在接下来的两章中着手考察这样一个问题：德性应归于激情、能力还是习惯这一属，以及若干其他相关之点。他以如下前提作为其考察的基础，并由此推出道德德性的一般学说与定义，该论著余下部分则构成对此的阐述。

前提。

1. 德性要么是情感(πὰθος)，要么是能力(δὐναμις)，要么是习惯(ἕξις)。

2.情感不是我们据以受赞扬或责备、或我们据以作出 deliberate preference 的事物。

3.能力不是我们据以受赞扬或责备、并且伴有 deliberate preference 的事物。

4.德性是我们据以受赞扬或责备、并且伴有 deliberate preference 的某种事物。

5.任何使自己的作品处于良好状态的艺术或科学都避免极端，并着眼于相对于人性的中道(τὸμἐσον...πρὸς ἡμ῀ ας)

6. 德性比任何技艺或科学都更为精确、更为卓越。这是一个`*a fortiori*的论证。如果科学与真正的技艺同样避免缺陷与过度，那么德性就更要遵循不偏不倚的中道。如果它们使其作品处于良好状态，那么我们更有理由说，德性使其特有的作品“处于良好状态”。让最后的前提如此解释。我们也将略去一切关于赞扬或责备的提及，因为前提中对这些的提及只与审慎的偏好相伴随，而这是我们打算保留的一个元素。于是我们可以假定以下记号作为我们的代表--

$v =$ virtue.
$p =$ passions.
$f =$ faculties.
$h =$ habits.

d = 伴有 deliberate preference 的事物。g = 使其作品处于良好状态的事物。m = 着眼于相对于人性的中道的事物。

那么，使用 q 作为一个不定类记号，我们的前提将由以下方程表达：

$$\begin{aligned} v &= q\{p(1-f)(1-h)+f(1-p)(1-h)+h(1-p)(1-f)\}. \\ p &= q(1-d). \\ f &= q(1-d). \\ v &= qd. \\ g &= qm. \\ v &= qg. \end{aligned}$$

并从中分别消去符号q,

$$v\{1-p(1-f)(1-h)-f(1-p)(1-h)-h(1-p)(1-f)\}=0. \quad (1)$$
$$pd=0. \quad (2)$$
$$fd=0. \quad (3)$$
$$v(1-d)=0. \quad (4)$$
$$g(1-m)=0. \quad (5)$$
$$v(1-g)=0. \quad (6)$$

我们将首先从(2)、(3)和(4)中消去记号 d，然后确定 v 与 p、f 和 h 的关系。现在，(2)、(3)和(4)相加得到

$$(p+f)d+v(1-d)=0.$$

由此，按通常方式消去 d，我们得到

$$(p+f)v=0. \quad (7)$$

将此式加到(1)上，并确定v，我们得到

$$v=\frac{0}{p+f+1-p(1-f)(1-h)-f(1-p)(1-h)-h(1-f)(1-p)}.$$

由此通过发展，

$$v=\frac{0}{0}h(1-f)(1-p).$$

这个方程的解释是：德性是一种习惯，而不是一种能力或情感。

接下来，我们将从原方程组中消去 f、p 和 g，然后确定 v 与 h、d 和 m 的关系。在这种情况下，我们将一起消去 p 和 f。将(1)、(2)和(3)相加，我们得到

$$v\{1-p(1-f)(1-h)-f(1-p)(1-h)-h(1-p)(1-f)\} \\ +pd+fd=0.$$

参照 p 和 f 来展开这一内容，我们便得到

$$(v+2d)pf+(vh+d)p(1-f)+(vh+d)(1-p)f \\ +v(1-h)(1-p)(1-f)=0.$$

于是消元的结果将是

$$(v+2d)(vh+d)(vh+d)v(1-h)=0.$$

现在 v + 2 d = v + d + d，根据命题 I.，这可归约为 v + d。它与第二个因子的乘积是

$$(v+d)(vh+d),$$

which by Prop. II. reduces to $d+v(vh)$ or $vh+d$.

In like manner, this result, multiplied by the third factor, gives simply $vh+d$. Lastly, this multiplied by the fourth factor, $v(1-h)$, gives, as the final equation,

$$vd(l-h)=0 \tag{8}$$

剩下的就是从(5)和(6)中消去g。结果是

$$v(1-m)=0 \tag{9}$$

最后，将方程(4)、(8)和(9)相加可得

$$v(1-d)+vd(1-h)+v(1-m)=0$$

由此我们得到

$$v=\frac{0}{1-d+d(1-h)+1-m}.$$

而这一结果的发展给出

$$v=\frac{0}{0}hdm,$$

f 其解释是，--德性是一种伴有 *deliberate preference*、并着眼于相对于人性的中道的习惯。

严格说来，这不是一个定义，而是对德性的一种描述。然而，它却是全部能够从前提出正确推断出来的东西。亚里士多德特别将审慎的必然性与它联系起来，以确定安全和中间路线

行动；毫无疑问，古代关于德性的理论总体上比那些(效用理论除外)在近代最为流行的理论更具理智的特征。德性被视为在于整个心灵的正当状态和习惯，而非在于良心的单一至上或道德才能。并且在某种程度上，那些理论无疑是正确的。因为尽管对良心命令的无条件服从是德性行为的一个本质要素，但那些命令与那些不变的正直原则(αἰώνια δίκαια)--它们奠基于事物的构造之中，或者更确切地说，它们本身就是事物构造的基础--的一致性，则是另一个要素。而且一般来说，这种一致性，至少在任何高度上，都与无知和心智迟钝的状态不相容。回到亚里士多德的具体理论，在大多数人看来，它可能具有过于否定的特征，而且回避极端并不能为施展我们存在中更高贵的能量提供充分的空间。亚里士多德似乎对他的体系的这一缺陷认识不足，当他在其第七卷的开篇谈到一种超越人性尺度的"英雄德性"[1]时。

7. 我已经指出(VIII.1)，单一方程或命题的理论包含了一些问题，这些问题除非与方程组理论相关联，否则无法得到完全解答。当提出从一给定的单一方程确定不是某个单一基本类、而是某个复合类--其表达式中涉及多于一个元素--与其余元素的关系时，这一评述便得到了例证。以下的特殊例子以及随后的普遍问题，即属此种性质。

例2--让我们重新采用第七章中所使用的财富定义的符号表达式，即，

$$w = st\left\{p + r\left(1 - p\right)\right\},$$

wherein, as before,

$w = \text{wealth},$

s = 供给有限的事物，t = 可转让的事物，p = 产生快乐的事物，r = 防止痛苦的事物；并假定要求由此确定可转让且产生快乐的事物与定义中其他元素，即财富、供给有限的事物和防止痛苦的事物之间的关系。

可转让且产生快乐的事物的表达式为tp。让我们用一个新的记号y来表示它。于是我们得到方程

$$\begin{aligned} w &= st\left\{p + r\left(1 - p\right)\right\}, \\ y &= tp, \end{aligned}$$

1 τὴν ὑπὲρ ἡμᾶς ἀρετὴν ἠρωϊκήν τινα και θειαν - 《尼各马可伦理学》第七卷

由此，如果我们消去t和p，我们就可以把y确定为w、s和r的函数。对结果加以解释，就会给出所求的关系。

将上述方程的各项移至第一边，我们得到

$$\begin{aligned} w - stp - str\,(1-p) &= 0. \\ y - tp &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

并将这些方程的平方相加，

$$w + stp + str\,(1-p) - 2wstp - 2wstr\,(1-p) + y + tp - 2ytp = 0. \tag{4}$$

为了消去那些记号，将第一个成员关于t和p展开，我们得到

$$\begin{aligned} &(w + s - 2ws + 1 - y)\,tp + (w + sr - 2wsr + y)\,t\,(1-p) \\ &\quad + (w+y)\,(1-t)\,p + (w+y)\,(1-t)\,(1-p)\,; \end{aligned} \tag{5}$$

而消去t和p的结果，将通过令以下四个系数的乘积等于0而得到

$$tp, t\,(1-p)\,, (1-t)\,p, \text{ and } (1-t)\,(1-p)\,.$$

或者，根据命题3，从上述方程中消去t和p的结果将具有如下形式

$$Ey + E'\,(1-y)\,,$$

其中E是通过在给定方程中把y变为1，然后消去t和p而得到的结果；而E′是通过在同一方程中把y变为0，然后消去t和p而得到的结果。而在每种情况下消去t和p的方式，都是把四个成分tp、t(1 – p)等的系数相乘。

If we make $y = 1$, the coefficients become–
1st. $w\,(1-s) + s\,(1-w)$
2nd. $1 + w\,(1-sr) + s\,(1-w)\,r$, equivalent to 1 by Prop. I.
3rd and 4th. $1 + w$, equivalent to 1 by Prop. I.
Hence the value of E will be

$$w\,(1-s) + s\,(1-w)\,.$$

Again, in (5) making $y = 0$, we have for the coefficients–
1st. $1 + w\,(1-s) + s\,(1-w)$, equivalent to 1.
2nd. $w\,(1-sr) + sr\,(1-w)$.
3rd and 4th. w.
The product of these coefficients gives

$$E' = w\,(1-sr)\,.$$

因此，用以确定y的方程是

$$\{w(1-s)+s(1-w)\}\,y+w(1-sr)(1-y)=0,$$
$$\therefore y=\frac{w(1-sr)}{w(1-sr)-w(1-s)-s(1-w)};$$

并展开第二项，

$$\begin{aligned} y \quad &= \tfrac{0}{0}wsr+ws(1-r)+\tfrac{1}{0}w(1-s)r+\tfrac{1}{0}w(1-s)(1-r)\\ &\quad +0(1-w)sr+0(1-w)s(1-r)+\tfrac{0}{0}(1-w)(1-s)r\\ &\quad +\tfrac{0}{0}(1-w)(1-s)(1-r); \end{aligned}$$

由此化简。

$$y=ws(1-r)+\frac{0}{0}wsr+\frac{0}{0}(1-w)(1-s), \tag{6}$$
$$\text{with } w(1-s)=0. \tag{7}$$

其解释为--第一。可转移且能产生快乐的东西，由全部*(*供给有限且*)*不防止痛苦的财富、*(*供给有限且*)*防止痛苦的无限量财富，以及无限量的既非财富又非供给有限的东西组成。

第二。一切财富的供给都是有限的。

在上述解答中，我把完整描述中由伴随的独立关系(7)所隐含的那一部分写在括号里。

8.下述问题具有更为一般的性质，并将为诸如上一个问题那样的问题提供一个简便的实用规则。

一般问题。

Given any equation connecting the symbols x, y..w, z..

要求用剩余的记号 w、z 等来确定由记号 x、y.. 以任何方式表达的任何类的逻辑表达式。让我们将自己限制在只有两个记号 x、y 和两个记号 w、z 的情形，这一情形足以确定一般规则。设 V = 0 为给定的方程，并设 φ(x, y) 表示其表达式有待确定的类。假设 t = φ(x, y)，那么，从上述两个方程中，x 和 y 应被消去。

现在方程 V = 0 可以展开为如下形式

$$Axy+Bx(1-y)+C(1-x)y+D(1-x)(1-y)=0, \tag{1}$$

A、B、C和D是记号w和z的函数。

再者，由于φ(x, y)表示一个类或事物的集合，它必定由一个成分或一系列系数为1的成分组成。

因此，如果φ(x, y)的完整展开式被表示为如下形式

$$axy + bx(1-y) + c(1-x)y + d(1-x)(1-y),$$

the coefficients a, b, c, d must each be 1 or 0.

Now reducing the equation $t = \phi(x, y)$ by transposition and squaring, to the form

$$t1 - \phi(x, y) + \phi(x, y)(1-t) = 0;$$

and expanding with reference to x and y, we get

$$\begin{aligned} t(1-a) + a(1-t)xy + t(1-b) + b(1-t)x(1-y) \\ +t(1-c) + c(1-t)(1-x)y \\ +t(1-d) + d(1-t)(1-x)(1-y) = 0; \end{aligned}$$

由此，将此加到(1)中，我们得到

$$\begin{aligned} A + t(1-a) + a(1-t)xy \\ +B + t(l-b) + b(l-t)x(1-y) + \&c. = 0. \end{aligned}$$

设消去 x 与 y 所得的结果具有如下形式

$$Et + E'(1-t) = 0,$$

那么，根据上述所说，E将是当t = 1时上述展开式的系数所变成的东西的约简乘积，而E ′则是同样受条件t = 0约简的相同因子的乘积。

因此，E 将是简化后的乘积

$$(A + 1 - a)(B + 1 - b)(C + 1 - c)(D + 1 - d).$$

考虑这个表达式的任一因子，如A + 1 − a，我们看到当a = 1时它变为A，而当a = 0时它变为1 + A，根据命题I这约简为1。因此我们可以推断，E将是V的展开式中那些在φ(x, y)的展开式中系数为1的成分的系数的乘积。

而且 E ′将是约化乘积

$$(A + a)(B + b)(C + c)(D + d).$$

考虑这些因子中的任何一个，如A + a，我们看到当a = 0时它变为A，而当a = 1时它约简为1；其余因子依此类推。因此E将是y的展开式中那些在φ(x, y)的展开式中系数为0的成分的系数的乘积。把这些情况合在一起看，我们可以建立以下规则：

9. 从逻辑方程推导出由记号、、等的给定组合所表达的任何类与给定方程中所涉及的任何其他记号所表示的类之间的关系。

RULE.–*Expand the given equation with reference to the symbols* x, y. *Then form the equation*

$$Et + E'(1-t) = 0,$$

其中是上述展开式中那些在给定类的表达式中系数为*1*的全部成分的系数的乘积，而是展开式中那些在给定类的表达式中系数为*0*的成分的系数的乘积。通过求解和解释从上述方程推出的值，将是所求的表达式。

注--尽管在本规则的证明中，被假定为仅由正项组成，但很容易表明这个条件是不必要的，而且该规则是普遍的，并且实际上不需要对给定方程作任何准备。

10.例3--给出与例2中相同的财富定义，要求用由w、s和r所表示的其他元素来表达可转让但不产生快乐的事物,t(1 – p)。方程

$$w - stp - str(1-p) = 0,$$

平方后给出，

$$w + stp + str(1-p) - 2wstp - 2wstr(1-p) = 0;$$

并对t和p展开第一个成员，

$$(w + s - 2ws)tp + (w + sr - 2wsr)t(1-p) + w(1-t)p \\ + w(1-t)(1-p) = 0.$$

The coefficients of which it is best to exhibit as in the following equation;

$$w(1-s) + s(1-w)tp + w(1-sr) + sr(1-w)t(1-p) + w(1-t)p \\ + w(1-t)(1-p) = 0$$

令待确定的函数t(1 – p)由z表示；那么
关于t和p的z的充分发展是

$$z = 0tp + t(1-p) + 0(1-t)p + 0(1-t)(1-p).$$

因此，根据上一个问题，我们有

$$Ez + E'(1-z) = 0;$$
$$\text{where } E = w(1-sr) + sr(1-w);$$
$$E' = w(1-s) + s(1-w) \times w \times w = w(1-s);$$
$$\therefore w(1-sr) + sr(1-w)z + w(1-s)(1-z) = 0.$$

因此，

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{w(1-s)}{2wsr - ws - sr} \\
&= \frac{0}{0}wsr + 0ws(1-r) + \frac{1}{0}w(1-s)r + \frac{1}{0}w(1-s)(1-r), \\
&\quad +0(1-w)sr + \frac{0}{0}(1-w)s(1-r) + \frac{0}{0}(1-w)(1-s)r \\
&\quad +\frac{0}{0}(1-w)(1-s)(1-r). \\
\text{Or, } z &= \frac{0}{0}wsr + \frac{0}{0}(1-w)s(1-r) + \frac{0}{0}(1-w)(1-s), \\
&\quad \text{with } w(1-s) = 0.
\end{aligned}
$$

因此，可转让且不产生快乐的事物，要么是财富*(*供给有限且防止痛苦*)*；要么是并非财富、但供给有限且不防止痛苦的事物；要么是并非财富、且供给无限的事物。

以下以类似方式推出的结果将很容易验证：供给有限且产生快乐但并非财富的事物--是不可转让的。

不产生快乐的财富是可转让的、供给有限的，并且防止痛苦。

供给有限且要么是财富、要么产生快乐但并非两者兼有的事物--要么是可转让且防止痛苦的，要么是不可转让的。

11. 从自然史的领域中可以选择大量奇特的例子。然而，我并不认为这类应用会具有任何独立的价值。例如，它们不会为动物学科学中分类的真正原则提供任何启示。因为要发现这些原则，需要某种实证知识的基础--对有机结构、对目的论适应的一些了解；而这是一种只能通过运用外部观察和分析手段才能获得的知识。然而，取自然史中任何一组命题，大量逻辑问题便会呈现出来，而不论采用何种分类系统。也许在构造这类例子时，最好避免提及一个类或物种的名称所直接暗示的那种属性，因为那是多余的，例如环节动物(一类包括蚯蚓和水蛭的动物)的环状结构。

例4.-1. 环节动物身体柔软，或裸露，或被包裹在
管。
2.环节动物由所有在双重循环血管系统中具有红色血液的无脊椎动物组成。

假设 a = 环节动物门；
s = 软体动物；n = 裸露的；t = 包被于管中的；i = 无脊椎的；r = 具有红色血液的，等等。

那么给定的命题将由方程来表达

$$a = vsn(1-t) + t(1-n); \tag{1}$$

$$a = ir; \tag{2}$$

我们可以补充隐含条件，

$$nt = 0. \tag{3}$$

消去v，并将方程组化为单一方程，我们得到

$$a[1 - sn(1-t) - st(1-n)] + a(1-ir) + ir(1-a) + nt = 0. \tag{4}$$

假定我们希望获得包被于管中的软体动物(凭借前提)相对于以下元素所处的关系，即，具有红色血液、具有外部覆盖物以及具有脊柱。

我们必须先消去 a。结果为

$$ir1 - sn(1-t) - st(1-n) + nt = 0.$$

Then (IX. 9) developing with respect to s and t, and reducing the first coefficient by Prop. 1, we have

$$nst + ir(1-n)s(1-t) + (ir+n)(1-s)t + ir(1-s)(1-t) = 0. \tag{5}$$

Hence, if $st = w$, we find

$$nw + ir(1-n) \times (ir+n) \times ir(1-w) = 0;$$

or,

$$nw + ir(1-n)(1-w) = 0;$$

$$\therefore w = \frac{ir(1-n)}{ir(1-n) - n}$$

$$= 0irn + ir(1-n) + 0i(1-r)n + \frac{0}{0}i(1-r)(1-n)$$

$$+0(1-i)rn + \frac{0}{0}(1-i)r(1-n) + 0(1-i)(1-r)n$$

$$+\frac{0}{0}(1-i)(1-r)(1-n);$$

$$\text{or, } w = ir(1-n) + \frac{0}{0}i(1-r)(1-n) + \frac{0}{0}(1-i)(1-n).$$

因此，包裹在管中的软体动物由所有具有红血且非裸露的无脊椎动物，以及不具有红血且非裸露的无脊椎动物的不确定剩余部分，以及非裸露的脊椎动物组成。

并且以完全类似的方式，以下约化方程已从展开式(5)中推导出来，其解释留给读者。

$$s(1-t) = irn + \frac{0}{0}i(1-n) + \frac{0}{0}(1-i)$$
$$(1-s)t = \frac{0}{0}(1-i)r(1-n) + \frac{0}{0}(1-r)(1-n)$$
$$(1-s)(1-t) = \frac{0}{0}i(1-r) + \frac{0}{0}(1-i).$$

在上述任何一个例子中，我的目的都不是以任何特殊方式展示该方法的力量。我认为，那种力量只有与概率的数学理论相关联才能充分展示。然而，我要向任何可能希望就此形成正确看法的人建议，让他们按照普通逻辑的规则来考察以下问题，然后再查看其解答；同时记住，无论它具有怎样的复杂性，这种复杂性都可以无限倍增，其唯一效果不过是使按照本著作的方法求解更为费力，但并不会减少其确实可达到的程度。

例*5*。假设对一类自然产物的观察导致了以下一般结果。

第一，在这些产物中的任何一个中，当性质A和C缺失时，性质E被发现，连同性质B和D之一，但不是两者同时。

第二，凡是在性质A和D被发现而E缺失的地方，性质B和C将要么同时被发现，要么同时缺失。

第三，凡是在性质A与B或E或两者同时被发现的地方，那里要么性质C要么性质D将被发现，但不是两者同时。反之，凡是在性质C或D单独被发现的地方，那里性质A将与B或E或两者同时被发现。

于是要求确定：第一，在任何特定情况下，从性质A的已确定存在可以得出关于性质B、C和D的什么结论；以及性质B、C和D之间是否存在任何独立的关系。第二，以类似方式关于性质B以及性质A、C和D可以得出什么结论。

将会注意到，在三个数据中的每一个中，所传达的关于性质A、B、C和D的信息都与另一个元素E交织在一起，关于这个元素我们在结论中不想说什么。因此，将有必要从表达给定命题的方程系统中消去代表性质E的记号。

Let us represent the property A by x, B by y, C by z, D by w, E by v. The data are

$$\bar{x}\bar{z} = qv(y\bar{w} + w\bar{y}); \tag{1}$$
$$\bar{v}xw = q(yz + \bar{y}\bar{z}); \tag{2}$$
$$xy + xv\bar{y} = w\bar{z} + z\bar{w}; \tag{3}$$

¯x代表1 – x，等等，而q是一个不确定的类记号。消去
将q分别从第一和第二方程中消去，并将结果加到按(5)约化的第三方程，第八章，我们得到

$$\bar{x}\bar{z}(1 - vy\bar{w} - vw\bar{y}) + \bar{v}xw(y\bar{z} + z\bar{y}) + (xy + xv\bar{y})(wz + \bar{w}\bar{z}) + (w\bar{z} + z\bar{w})(1 - xy - xv\bar{y}) = 0. \tag{4}$$

从这个方程中必须消去v，并从结果中确定x的值。为实现这一目标，采用本章命题3的方法将是方便的。

那么，消元的结果可由方程表示

$$Ex + E'(l - x) = 0.$$

To find E make $x = 1$ in the first member of (4), we find

$$\bar{v}w(y\bar{z} + z\bar{y}) + (y + v\bar{y})(wz + \bar{w}\bar{z}) + (w\bar{z} + z\bar{w})\bar{v}\bar{y}.$$

消去 v，我们有

$$(wz + \bar{w}\bar{z})\{w(y\bar{z} + z\bar{y}) + y(wz + \bar{w}\bar{z}) + \bar{y}(w\bar{z} + z\bar{w})\};$$

which, on actual multiplication, in accordance with the conditions $w\bar{w} = 0$, $z\bar{z} = 0$, &c., gives

$$E = wz + y\bar{w}\bar{z}$$

接下来，求E′，在(4)中令x = 0，我们有

$$z(1 - vy\bar{w} - v\bar{y}w) + w\bar{z} + z\bar{w}.$$

whence, eliminating v, and reducing the result by Propositions 1 and 2, we find

$$E' = w\bar{z} + z\bar{w} + \bar{y}\bar{w}\bar{z};$$

因此，最终我们得到

$$(wz + y\bar{w}\bar{z})x + (w\bar{z} + z\bar{w} + \bar{y}\bar{w}\bar{z})\bar{x} = 0; \tag{5}$$

从哪一个

$$x = \frac{w\bar{z} + z\bar{w} + \bar{y}\bar{w}\bar{z}}{w\bar{z} + z\bar{w} + \bar{y}\bar{w}\bar{z} - wz - y\bar{w}\bar{z}}$$

wherefore, by development,

$$\begin{aligned} x = {} & 0yzw + yz\bar{w} + y\bar{z}w + 0y\bar{z}\bar{w} \\ & + 0\bar{y}zw + \bar{y}z\bar{w} + \bar{y}\bar{z}w + \bar{y}\bar{z}\bar{x}; \end{aligned}$$

或者，将各项按竖列合并，

$$x = z\bar{w} + \bar{z}w + \bar{y}\bar{z}\bar{w}; \tag{6}$$

其解释为--

无论性质在什么物质中被发现，那里也将被发现要么性质要么性质，但不是两者同时，否则性质、、和将全部缺失。反之，凡是在性质或性质单独被发现的地方，或者性质、、和一起缺失的地方，那里性质将被发现。

It also appears that there is no independent relation among the properties B, C, and D.

Secondly, we are to find y. Now developing (5) with respect to that symbol,

$$(xwz + x\bar{w}\bar{z} + \bar{x}w\bar{z} + \bar{x}z\bar{w})y + (xwz + \bar{x}w\bar{z} + \bar{x}z\bar{w} + \bar{x}\bar{z}\bar{w})\bar{y} = 0;$$

由此，如前所述，

$$y = \bar{x}\bar{w}\bar{z} + \frac{0}{0}(\bar{x}wz + xw\bar{z} + xz\bar{w}), \tag{7}$$

$$xzw = 0; \tag{8}$$

$$\bar{x}z\bar{z}w = 0; \tag{9}$$

$$\bar{x}z\bar{w} = 0; \tag{10}$$

由(10)经求解化简为如下形式

$$\bar{x}z = \breve{\frac{0}{0}}w;$$

我们有独立关系，--如果性质缺失而存在，
D 存在。再次，通过相加和求解，(8) 和 (9) 给出

$$xz + \bar{x}\bar{z} = \breve{\frac{0}{0}}\bar{w}.$$

由此我们得到通解以及其余独立的
关系：

1. 如果该属性出现在其中一个生成物中，那么属性、、和要么全部缺失，要么其中仅有一个缺失。反之，如果它们全部缺失，则可以断定属性*A*存在(7)。

2. 如果和同时存在或同时缺失，则将缺失，这完全与 B(8)和(9)的存在或缺失无关。

我未曾尝试去验证这些结论。

第十章

论完善方法的条件。

1. 关于初级命题的主题已经详细讨论过了，我们即将进入次级命题的考察。逻辑科学这两大部分之间的过渡间隙，可以为我们提供一个合适的时机来暂停一下，在回顾我们已走过的某些步骤的同时，探究在像我们所从事的这样一个主题中，究竟是什么构成了方法的完善。我在这里所说的完善，不仅仅是那种在于力量的完善，而且也是那种奠基于对适宜与美好之概念的理解的完善。对这一问题的仔细分析，很可能将我们引向如下这样的结论，即：一种完善的方法不仅在其所要达成的目标方面应当是有效的，而且在其所有的部分和过程中都应当体现出某种统一与和谐。如果甚至连方法的形式本身都能暗示那些基本原则，并且如果可能的话暗示它们所依据的那一个基本原则，那么这一概念就会得到最充分的实现。在将这些考虑应用于推理科学时，我们不妨将视野扩展到单纯的分析过程之外，不仅就演绎的模式或形式而言，而且就据以进行演绎的数据或前提的体系而言，探究什么是最好的。

2. 就单纯的力量而言，毫无疑问，第八章中展开的第一种方法在其适当的范围内是一种完美的方法。任意常数的引入使我们不依赖于前提的形式，也不依赖于用以表示前提的方程之间的任何条件。但它似乎引入了一个异质的元素，而且虽然它是一种更为费力的解法形式，它也是一种不如同一章中所论证的第二种归约方法优雅的解法形式。然而，在某些条件下，后一种方法会呈现出比它本来所具有的更为完美的形式。为了使由方程所表达的那个基本条件

$$x(1-x)=0,$$

the universal type of form, would give a unity of character to both processes and results, which would not else be attainable. Were brevity or convenience the

一种方法唯一有价值的性质，采纳这样一种原则并不会带来任何好处。因为要在求解的每一步上都赋予上述特征，在某些情况下会涉及不小的初步归约工作。但知道这是可以做到的仍然是有趣的，而且了解这种解法形式会自发呈现的条件甚至具有一定的重要性。其中一些要点将在本章中加以考虑。

命题一。

3. 将逻辑记号间的任何方程化为形式 V = 0 ，其中满足对偶律，

$$V(1-V)=0.$$

第五章命题4已表明，只要V是一系列成分之和，上述条件便得到满足。又由第六章命题2显然可知，所有方程，当经移项化为V = 0的形式后，通过对第一项作展开而产生相同的成分系列、且其系数不为零者，都是等价的；那些系数的具体数值无关紧要。因此，本命题的目的总可以通过以下方式达成：将方程的所有项移到第一边，充分展开该边，并在结果中把所有不为零的系数改为1，但已经具有该值者除外。然而，由于含有许多记号的函数的展开式会使我们得到因过长而不便的表达式，因此有必要说明，在实际呈现于我们注意力的唯一一些情形中，如何避免这一复杂性的来源。

方程的那些重要的基本形式已经在第
VIII. 它们是--

$$\begin{aligned} X &= vY, \\ X &= Y, \\ vX &= vY. \end{aligned}$$

只要条件X(1 – X) = 0 , Y(1 – Y) = 0得到满足，我们就有
既然上述方程中的前两个把我们引向这些形式

$$X(1-Y) = 0, \tag{1}$$
$$X(1-Y) + Y(1-X) = 0; \tag{2}$$

在相同情况下，可以表明它们中的最后一个
给出

$$v(X(1-Y)+Y(1-X))=0; \tag{3}$$

all which results obviously satisfy, in their first members, the condition

$$V(1-V)=0.$$

既然上述就是逻辑系统的方程在得到恰当表达时实际呈现的形式和条件，那么总是可以通过上述方法将它们归约为服从所需定律的形式。然而，尽管各个方程可以由此满足该定律，它们的等价和(VIII.4)却可能不满足，因此还有待说明如何也对它施加所需的条件。那么，让我们把将系统中各个已归约的方程相加而成的方程表示为如下形式

$$v+v'+v'',\&c.=0, \tag{4}$$

这个方程与从中获得它的系统单独等价。我们假设v, v′, v″等是满足条件的类项(IX.1)

$$v(1-v)=0, v'(1-v')=0, \&c.$$

现在，(4)的完整解释将通过就其所包含的所有基本记号x、y等展开第一项，并将所有系数不为零的成分等于0来求得；换言之，即在v、v′、v″等中所找到的所有成分。但这些成分包括--第一，在v中所找到的那些；第二，不在v中所找到、但在v′中所找到的那些；第三，既不在v中也不在v′中所找到、但在v″中所找到的那些，依此类推。因此它们将是在表达式中找到的那些

$$v+(1-v)v'+(1-v)(1-v)v''+\&c., \tag{5}$$

一个其中没有成分被重复的表达式，它显然满足定律V(1 – V) = 0。

因此，如果我们有表达式

$$(1-t)+v+(1-z)+tzw,$$

其中项1 – t、1 – z被括起来以表示它们应被视为单个类项，我们应按照(5)将其约化为满足条件V(1 – V) = 0的表达式，方法是将第一项之后的所有项乘以t，然后将第二项之后的所有项乘以1 – v；最后，将第三项之后剩余的项乘以z；结果为

$$1-t+tv+t(1-v)(1-z)+t(1-v)zw. \tag{6}$$

4.那么所有逻辑方程都可约化为形式V = 0,V满足对偶律。但显然更高程度的完善将是

如果方程总是以这样的形式呈现自身，无需任何准备，并且不仅在它们的原始陈述中表现出这种形式，而且在那些为了使方程组化为单一等价形式所必需的添加之后仍然保持不变。它们并非自发地呈现这一特征，这不能恰当地归因于方法的缺陷，而是我们的前提并不总是完备、准确和独立这一事实的结果。当前提涉及未表达出来的(与形式的相区别的)实质关系时，它们是不完备的。当前提蕴含并非意图中的关系时，它们是不准确的。但撇开这些在当前情况下我们较少关切的要点，让我们考虑它们在何种意义上可能不是独立的。

5.一个命题系统可以被称为独立的，当不可能从系统的任何部分推出可从其任何其他部分推出的结论时。假设代表那些命题的方程都约化为形式

$$V = 0,$$

那么上述条件意味着，能够出现在系统某一特称函数V的展开式中的任何成分，都不能出现在同一系统的任何其他函数V′的展开式中。当这一条件不被满足时，该系统的方程不是独立的。这可能在各种情况下发生。设所有方程在其第一项中都满足对偶律，那么如果一个方程的展开式中出现一个正项x，而另一个方程的展开式中出现一个项xy，则这些方程不是独立的，因为项x可进一步展开为xy + x(1 – y)，而方程

$$xy = 0$$

因此涉及系统中的两个方程。再者，设一项xy出现在一个方程中，而一项xz出现在另一个方程中。两者都可以展开以给出共同成分xyz。还可以容易地想象其他情况，其中初看似乎完全独立的前提实际上并非如此。每当形式为V = 0的方程如此并非真正独立时，尽管它们个别可能满足对偶律，

$$V(1 - V) = 0,$$

将它们相加所得的等价方程将不满足该条件，除非已通过本章的方法进行了充分的化简。另一方面，当一个系统的方程既满足上述定律又彼此独立时，它们的和也将满足同一定律。我之所以在这些要点上论述得比原本必要的更为详尽，是因为在我看来，努力为我们自己形成并在一切研究中始终置于眼前的，是一种理想完善性的典范--这是未来努力的目标和指南。在当前这一类探究中，方法改进的主要目标应当是

在尽可能与简洁一致的范围内，促进方程的变换，以使上述基本条件普遍化。

与此主题相关，以下命题值得注意。

命题二。

如果任何方程的第一个成员 V = 0 满足条件 V(1 – V) = 0 ，并且如果该方程中任何记号的表达式被确定为其他记号的展开函数，则展开式的系数可以

仅取形式 1 , 0 ,0 0 ,1 – 0.

因为如果方程关于t展开，我们得到结果，

$$Et + E'(1-t), \tag{1}$$

E 和 E ′是当 t 在其中相继变为 1 和 0 时 V 所变成的东西。因此 E 和 E ′本身将满足这些条件

$$E(1-E) = 0, \quad E'(1-E') = 0. \tag{2}$$

现在(1)给出

$$t = \frac{E'}{E'-E},$$

其第二项须作为其余记号的函数展开。显然，在计算系数时 E ′和 E ′所能取的唯一数值将是 1 和 0。因此只可能出现以下情形：

1st. $E' = 1,\ E = 1,$ then $\dfrac{E'}{E'-E} = \dfrac{1}{0}.$

2nd. $E' = 1,\ E = 0,$ then $\dfrac{E'}{E'-E} = 1.$

3rd. $E' = 0,\ E = 1,$ then $\dfrac{E'}{E'-E} = 0.$

4th. $E' = 0,\ E = 0,$ then $\dfrac{E'}{E'-E} = \dfrac{0}{0}.$

Whence the truth of the Proposition is manifest.

6. 可以指出，形式 1、0 和00出现于方程的解中，与条件 V(1 – V) = 0 的任何指涉无关。但系数10.则并非如此。当上述条件得到满足时，该系数所附的项可以取除 1、0 和00,当该条件不被满足时以外的任何其他值。允许并且将有助于一致性的是，把不呈现本命题所提及的四种形式中任何一种的展开式的任何系数改为10,将此视为表示记号所适于表明其所附的系数应被等于 0。我将经常采用这一做法。

7. 从任一方程 V = 0 中消去任何记号、、&c.的结果，该方程的第一项恒满足对偶律，

$$V(1-V)=0,$$

可以通过参照其他记号展开给定方程，并令展开式中系数等于1的那些成分之和等于0来得到。假设给定方程V = 0只涉及三个记号x、y和t，其中x和y需要被消去。设该方程关于t的展开式为

$$At+B(1-t)=0, \tag{1}$$

A and B being free from the symbol t.

By Chap. IX. Prop. 3, the result of the elimination of x and y from the given equation will be of the form

$$Et+E'(1-t)=0, \tag{2}$$

其中E是从方程A = 0中消去记号x和y所得的结果，E ′是从方程B = 0中消去所得的结果。

现在 A 和 B 必须满足该条件

$$A(1-A)=0, B(1-B)=0$$

因此，A(目前我们只限于这个系数)将是0或1，或一个构成项，或包含记号x和y的构成项的一部分之和。如果A=0，显然E=0；如果A是单个构成项，或包含x和y的构成项的一部分之和，E将为0。因为A关于x和y的完整展开式将包含系数为零的项，而E是所有系数的乘积。因此当A=1时，E等于A，但在其他情况下E等于0。同样，当B=1时，E等于B，但在其他情况下E消失。因此表达式(2)将包含(1)中系数A、B为1的那一部分(如果有的话)。这一推理是普遍的。例如，假设V涉及记号x、y、z、t，并且要求消去x和y。那么如果V关于z和t的展开式为

$$zt+xz(1-t)+y(1-z)t+(1-z)(1-t),$$

the result sought would be

$$zt+(1-z)(1-t)=0,$$

这就是展开式中系数为1的那一部分。因此，如果从任何方程组我们推出一个单一的等价方程V = 0,V满足条件

$$V(1-V)=0,$$

通常的消元过程可以完全省去，而由单一的展开过程来取代它们的位置。

8.如此指出的方法或许没有实际的好处，但它具有理论上的统一性和完备性，这使它值得重视，因此我将用未来的一章(第十四章)来阐明它。应用数学的进展已经提供了其他显著的例子，说明问题或方程的系统可以归入某个中心但普遍渗透的定律的支配之下。

9.从上述可见，有一类命题不需要上述准备方法的全部特殊手段。这就是以下列条件为特征的那一类：

第一，这些命题是普通类型的，由系词是或是的使用所隐含，谓词是特称的。

第二，命题的项是可理解的，无需假设进入这些项的表达式的元素之间存在任何被理解的关系。

第三，这些命题是独立的。

如果这种思辨并非全然徒劳，我们可以允许自己猜想：这些就是那些无误的存在者在将语言用作表达和思维的工具时所遵循的条件--他们只陈述自己的意思，一方面不压抑，另一方面不重复。无论从它们与完美语言观念的关系来看，还是从它们与精确方法过程的关系来看，这些条件都同样值得研究者注意。

第十一章

论次级命题，以及论
它们符号表达的原则。

1. 第四章已经确立了这一学说：每一个逻辑命题都可以归入两大类之一，即主命题和次命题。前一类已在本著前几章中讨论过，我们现在被引向对次命题的考察，即关于、或涉及被视为真或假的其他命题的命题。我们即将进行的探究，在其一般顺序和进展上，将类似于我们已经进行过的探究。这两项研究的不同在于它们所承认的思维对象，而不在于它们所揭示的形式的和科学的规律，也不在于建立在这些规律之上的方法或过程。概率会在某种程度上支持对这种结果的预期。它与我们所知的一切关于自然界的齐一性、以及我们所相信的一切关于自然界作者的不可改变的恒常性相一致，可以设想：在这样一个被赋予了如此之高能力的心灵中--不仅用于与周围景象交谈，而且用于认识自身，用于反思自身构造的规律--应当存在着一种和谐与齐一，其真实性不亚于物理科学的研究向我们揭示的那种和谐与齐一。诸如此类的预期绝不能成为我们探究的首要规则，也绝不能在任何程度上使我们偏离那些耐心研究的劳作，正是通过这些劳作我们才能确定提交给探究的特定领域内事物的实际构造。但是，当相似性的依据已被恰当而独立地确定之后，即使对于纯粹科学的目的而言，将这种相似性作为沉思的主题、追溯其范围、并接受它似乎向我们传达的尚未发现的真理的暗示，也并非不相宜。对事实作最终诉诸的必要性并不因此被搁置，类比的使用也不超出其应有的范围--即提示那些独立探究必须加以验证或予以拒绝的关系。

2. 次级命题是那些涉及或关涉被视为真或假的命题的命题。我们通过初级命题来表达事物的关系。但我们也能够使命题本身成为主词

思维，并表达我们关于它们的判断。任何此类判断的表达都构成一个次命题。不存在任何命题，以至于适当程度的知识不能使我们作出以下两种断言之一，即要么该命题是真的，要么该命题是假的；而这两种断言中的每一个都是次命题。“太阳照耀是真的；”“行星靠自身的光照耀不是真的；”就是这类例子。在前一例中，命题“太阳照耀”被断言为真。在后一例中，命题“行星靠自身的光照耀”被断言为假。次命题还包括我们借以表达命题之间的关系或依赖性的所有判断。我们可以将条件命题归入这一类或 division，如“如果太阳照耀，天气将是晴朗的。”还有大多数析取命题，如“要么太阳将照耀，要么计划将被推迟。”在前一例中，我们表达命题“天气将是晴朗的”的真对命题“太阳将照耀”的真的依赖。在后一例中，我们表达两个命题“太阳将照耀”、“计划将被推迟”之间的关系，意味着一个的真排斥另一个的真。我们同样必须将那些断言命题同时为真或同时为假的命题归入这同一类次命题，如“并非‘太阳将照耀’和‘旅程将被推迟’两者同时为真。”我们所注意到的区分要素甚至可以在同一个次命题中混合在一起。它可能既包含由要么、要么表达的析取要素，又包含由如果表达的条件要素；除此之外，相联系的命题本身还可能是复合性质的。如果“太阳照耀”,并且“闲暇允许”，那么要么“计划应当开始”,要么“应当采取某种预备步骤”。在这个例子中，若干命题被联结在一起，不是任意地和无意义地，而是以这样的方式表达它们之间的确定的联系--一种涉及它们各自真假性的联系。因此，按照我们的定义，这种组合构成一个次命题。

次级命题的理论值得认真研究，既因为它的多种应用，也因为前面已经提到的它与初级命题理论之间那种紧密而和谐的类比。对于这些要点中的每一个，我都希望进一步提出几点观察。

3. 我首先要指出，日常生活中的推理至少与以主命题形式出现一样频繁地以次命题形式出现。道德家和形而上学家的论述，也许较少关于事物及其性质，而较多关于原则和假说，关于真理以及真理之间的相互联系和关系。我们狭隘的经验就道德和社会那些尚未解决的重大问题所提示的结论，以不止一种方式表明了它们的人类起源的局限性；尽管普遍原则的存在不容置疑，但包含我们对它们应用之知识的那些局部公式却受制于条件、例外和失败。因此，在那些探究部门中

从其主题的性质来看，这本应是最有趣的，但我们实际知识中有许多是假设性的。以后将会看到，思辨哲学的作者们有一种强烈的倾向，采用相同的思维形式。因此，引入一种一般方法来讨论假设性命题和其他种类的次级命题，将为我们开辟一个比我们以前遇到的更有趣的应用领域。

4. 其次，关于次命题理论的讨论之所以有趣，是因为它与原始命题理论有着密切而显著的类比关系。将会看到，心灵活动所服从的形式规律在两种情形下具有相同的表达。因此，建立在这些规律之上的数学过程也是相同的。这样，在本著作前一部分所研究的方法，在我们即将着手的新应用中将继续可用。然而，尽管方法的规律和过程保持不变，解释的规则必须适应新的条件。我们将不得不以命题代替事物的类，并且对于类和个体的关系，我们将不得不考虑命题或事件的联系。尽管如此，在两个系统之间，无论在意旨和解释上如何不同，将会看到存在一种普遍贯通的和谐关系，一种类比，它既有助于克服每一个尚存的困难，本身又是一个有趣的研究主题，并且是标志着人类官能构造的那种性格统一的 conclusive proof。

命题一。

5. 研究次级命题与时间观念之间联系的性质。

在进入这一研究时，有必要清楚地说明连接次级命题与初级命题的类比的性质。

原始命题表达事物之间的关系，这些事物被视为一个宇宙的组成部分，而我们的论域材料就局限在这个宇宙的界限之内，无论这个宇宙是否与实际宇宙的界限同延。所表达的关系本质上是实体性的。一个给定类的成员中的一些、全部或没有一个，也是另一个类的成员。原始命题所涉及的主词--它们所表达的那些主词之间的关系--全都具有上述性质。

但在处理次命题时，我们发现自己涉及的是另一类主词和关系。因为我们所要处理的主词本身就是命题，所以可以问--我们是否也能把这些主词视为事物，并按照前一种情形的类比，将它们归入一个它们自己的宇宙?再者，这些主词命题之间的关系是共存真理或虚假的关系，而不是实体等价的关系。当表达两个不同命题的联系时，我们不说一个是另一个，而是使用诸如此类的说法：

根据我们希望传达的意义，如下：“或者命题X是真的，或者命题Y是真的；”“如果命题X是真的，那么命题Y是真的；”“命题X和Y共同是真的；”等等。

现在，在考虑诸如此类的关系时，我们并不被要求探究它们可能意义的全部范围(因为这可能使我们陷入因果性的形而上学问题，而这些问题超出了科学的正当界限)；但只需确定它们无疑具有的某种意义，而这种意义足以满足逻辑演绎的目的。让我们以一个条件命题作为考察的实例：“如果命题 X 是真的，那么命题 Y 是真的。”这个命题的一个无疑意义是：命题 X 为真的时间，就是命题 Y 为真的时间。这确实只是一种共存关系，可能并未穷尽该命题的意义，但它是该命题陈述中确实涉及的一种关系，而且进一步说，它足以满足逻辑推论的一切目的。

日常生活的语言认可这种关于次命题与时间观念本质联系的观点。因此，我们用“有些”一词来限制原始命题的应用，但用“有时”一词来限制次命题的应用。说“有时不义得胜”，等同于断言存在一些时间，在这些时间中命题“不义现在得胜”是一个真命题。确实有一些命题，其真理并非如此局限于特定时期或时机；这些命题在所有时间中都是真的，并获得了“永恒真理”的称号。这一区分对每个读过柏拉图(Plato)和亚里士多德(Aristotle)的人来说必定是熟悉的，尤其是后者，用它来表示科学的抽象真理--例如几何学命题，它们总是真的--与那些有时真有时假的事物之偶然的或现象的关系之间的对比。但是，表达这两种命题的语言形式都表现出对时间观念的共同依赖；在一种情形中局限于某个有限延续，在另一种情形中则延伸至永恒。

6. 确实可以说，在通常的推理中，我们往往完全没有意识到我们所使用的语言本身所包含的这种时间观念。但这一评论无论多么公正，也只是表明我们通常借助语词和结构良好的语言形式进行推理，而不去关注那些形式赖以确立的更深层依据。当前的研究进程将说明这同一原则。我将借助时间观念来确定次级命题表达式的规律，以及表达它们的记号组合的规律。但一旦那些规律和那些形式被确定下来，这种时间观念(我认为它对上述目的是本质性的)在实践中就可以被弃置不用。于是我们就可以从日常语言的形式过渡到这里所发展的思维符号工具的密切类似的形式，并使用其过程、解释其结果，而完全不必有意识地承认时间观念。

命题二。

7. 建立一个记号系统来表达次级命题，并表明它所涉及的记号服从与表达初级命题所用的相应记号相同的组合律。

让我们用大写字母 X、Y、Z 来表示那些我们想要就其真或假作出某种断言的、或试图在它们之间以次级命题的形式表达某种关系的初始命题。让我们用相应的小写字母 x、y、z 来表示心理操作，其意义如下，即：让 x 表示心灵的一种活动，通过它我们把注意力固定于命题 X 为真的那部分时间；当断言 x 表示命题 X 为真的时间时，就应作此理解。让我们进一步在如下意义下使用连接符号 +、-、= 等，即：让 x + y 表示命题 X 和 Y 分别为真的那些时间部分的总和，这些时间彼此完全分离。类似地，让 x – y 表示当我们从命题 X 为真的那部分时间中减去(据假设)命题 Y 为真的那包含部分后所剩下的那部分时间。又，让 x = y 表示命题 X 为真的时间与命题 Y 为真的时间相同。我们将称 x 为命题 X 的代表符号，等等。

由上述定义可以推出，我们将始终有

$$x + y = y + x,$$

对任一成员而言，都将表示同一时间集合。

让我们进一步用 xy 表示相继执行由 y 和 x 所表示的两个操作，即由以下元素构成的整个心理操作，即：第一，对命题 Y 为真的那部分时间的心理选择。第二，从该部分时间中，对其中所包含的命题 X 为真的那部分时间的心理选择--这些相继过程的结果是把注意力固定于命题 X 和 Y 均为真的那部分时间的整体。

由这一定义可以推出，我们将始终有

$$xy = yx. \tag{1}$$

因为无论我们首先在思想上选出命题Y为真的那部分时间，然后从结果中选出X为真的那部分时间；还是首先选出命题X为真的那部分时间，然后从结果中选出命题Y为真的那部分时间；我们都将得到相同的最终结果，即命题X和Y都为真的那部分时间。

通过继续这种推理方法可以确立：记号 x、y、z 等在此处赋予它们的解释种类下的组合规律，与同一记号在本论著第一部分赋予它们的解释下的组合规律，在表达式上是相同的。这种最终同一性的理由是明显的。因为在两种情况下，我们所研究的都是同一种能力，或同一种能力的组合；这些操作的本质特征不受影响，无论我们假设它们作用于包含一切存在的那个事物论域，还是作用于一切事件得以实现的整个时间，而一切断言、真理和命题至少都涉及这整个时间的某一部分。

因此，除了上述定律之外，我们还将根据第二章第(4)节得到其表达式为的定律

$$x(y+z) = xy + xz; \tag{2}$$

尤其是第二章第(2)节的基本对偶律，其表达式为

$$x^2 = x, or, x(1-x) = 0; \tag{3}$$

这一条定律，虽然它有助于区分逻辑中的思想系统与量科学中的思想系统，却赋予前者的过程一种它们否则不可能具有的完备性和一般性。

8.再者，由于这条定律(3)(以及其他定律)被记号0和1所满足，我们如前一样被引导去追问这些记号在当前思想系统中是否容许解释。我们先前所进行的同一推理过程表明它们确实容许，并使我们有理由采取以下两个立场，即：

第一，在次级命题的表达式中，0 相对于时间元素表示无。

第二，在同一系统中，1 表示论域，即该论述以任何方式被认为所涉及的全部时间。

正如在初级命题中论域有时被限制于实际事物论域的一小部分，有时又与那个论域同广延；同样在次级命题中，论域可以被限制于单独一天或流逝的瞬间，也可以包含时间的全部持续。它可以在最字面的意义上成为“永恒的”。事实上，除非话语的性质中表达或暗示了某种限制，次级命题中记号 1 的恰当解释就是“永恒”；正如它在初级系统中的恰当解释是实际存在的论域。

9.我们不必将记号x、y、z专门用于表示命题的真，而可以同样恰当地用它们来表示事件的发生。事实上，事件的发生既蕴含又被告命题的真所蕴含，即断言该事件发生的命题的真。记号x的一个意义

必然包含另一者。能够以这两种真正等价的解释中的任何一种来使用我们的记号，而问题的情境可能向我们表明哪一种最为可取，这将大大有助于便利；凡遇场合需要，我都要利用这一自由。在纯逻辑的问题中，我将把记号 x、y 等视为代表基本命题，前提所表达的关系即在这些命题之间。在概率的数学理论中--如前所述(I.12)，它建立在逻辑的基础之上，并且本书打算在后续部分加以处理--我将使用同样的记号来表示简单事件，这些事件所隐含的或所要求的出现频率被它算作其元素之一。

命题三。

10. 推导表达次级命题的一般规则。在由这一命题产生的各种研究中，充分论证将不那么必要，因为它们与已经完成的关于初级命题的类似研究具有精确的类比。我们将首先考虑项的表达；其次考虑连接它们的命题的表达。

由于1表示时间的整个持续，而x表示其中命题X为真的那部分，1 – x将表示命题X为假的那部分时间。

再者，由于xy表示命题X和Y都为真的那部分时间，我们将通过结合这一点和先前的观察，得出以下解释，即：

表达式x(1 – y)将表示命题X为真而命题Y为假的那段时间。表达式(1 – x)(1 – y)将表示命题X和Y同时为假的那段时间。

表达式x(1 – y) + y(1 – x)将表示X为真或Y为真但不同时为真的那段时间；因为那段时间是它们各自单独为真的时间之和。表达式xy +(1 – x)(1 – y)将表示X和Y或者都为真或者都为假的那段时间。

如果出现另一个记号z，同样的原则仍然适用。因此xyz表示命题X、Y和Z同时为真的时间；(1 – x)(1 – y)(1 – z)表示它们同时为假的时间；这些表达式之和将表示它们或者一起为真或者一起为假的时间。

上述例子中所涉及的解释的一般原则不需要进一步的说明或更明确的陈述。

11. 命题表达式的规律现在可以在它们所呈现的不同情形中展示和研究。然而，有一个具有根本重要性的原则，我希望首先提请注意。尽管已经奠定的表达原则是完全一般的，并且使我们能够将关于命题真假的断言限制在整个时间中的任何特定部分

(无论它是一个无限的永恒，还是一个起点和终点都已明确固定的时期，还是流逝的瞬间)构成我们论域的全域，然而，在人类推理的实际进程中，这种限制通常并不被采用。当我们断言一个命题为真时，我们一般是指它在我们论域所指的整个时间持续期内为真；而当关于命题的无条件真或假的种种不同断言被共同作出，作为逻辑论证的前提时，这些断言所指向的是同一个时间全域，而不是它的特殊而有限的部分。在那作为精确科学的对象或领域的必然质料中，对真理的每一断言都可能是对"永恒真理"的断言。在关于短暂现象的推理中(例如关于某种社会局势)，每一断言都可以通过直接参照当前时间"现在"而得到限定。但在两种情形下，除非有明确的相反表述，每个单独的命题都与同一持续时期相关。于是，进入我们考察的情形如下：

第一，表达命题"该命题为真"。

我们在这里需要表达的是，在我们话语主题所限定的那些时间界限之内，命题 X 是真的。现在，命题 X 为真的时间由 x 表示，而我们话语所指的时间范围由 1 表示。因此我们有

$$x = 1 \tag{4}$$

作为所需的表达式。2nd.要表达命题，"该命题是假的。"

我们在这里要表达的是，在我们话语所涉及的时间界限之内，命题 X 是假的；或者在这些界限之内，没有任何一段时间使它为真。现在，它为真的那部分时间是 x。因此所需的方程将是

$$x = 0. \tag{5}$$

这一结果也可以通过将命题 X 为假的时间表达式，即 1 – x，等于整个时间长度 1 来获得。这给出

$$\begin{aligned} 1 - x &= 1, \\ \text{whence } x &= 0. \end{aligned}$$

3rd.要表达析取命题，"要么该命题是真的，要么该命题是真的；"由此暗示所述命题相互排斥，也就是说，其中只有一个是真的。

命题 X 为真或命题 Y 为真但不同时为真的时间，由表达式 x(1 – y) + y(1 – x) 表示。因此我们有

$$x(1-y)+y(1-x)=1, \tag{6}$$

for the equation required.

如果在上面的命题中，小品词*either*、*or*被假定不具有绝对的析取力量，从而不排除命题 X 和 Y 同时为真的可能性，我们就必须在上面的方程的第一个成员中加上项 xy。这样我们就有

$$\begin{aligned} xy+x(1-y)+(1-x)y&=1,\\ \text{or } x+(1-x)y&=1. \end{aligned} \tag{7}$$

4th.要表达条件命题，“如果该命题是真的，那么该命题是真的。”

既然每当命题 Y 为真时，命题 X 就为真，那么在这里就必然且充分地要表达：命题 Y 为真的时间，是命题 X 为真的时间；也就是说，它是命题 X 为真的全部时间中的某个不确定的部分。现在，命题 Y 为真的时间是 y，而命题 X 为真的全部时间是 x。设 v 为不确定时间的记号，那么 vx 将表示全部时间 x 的一个不确定的部分。据此，我们将有

$$y=vx$$

正如所给命题的表达式。

12. 当 v 被如此视为不确定时间的记号时，vx 可以被理解为表示全部时间 x 的整体、或不确定的部分、或无部分；因为通过对任意记号 v 的特定确定，这些意义中的任何一种都可以实现。于是，如果确定 v 表示一个包含全部时间 x 的时间，那么 vx 将表示全部时间 x。如果确定 v 表示这样一个时间，它的一部分包含在时间 x 之中，但并不充满该时间的度量，那么 vx 将表示时间 x 的一部分。最后，如果确定 v 表示这样一个时间，它没有任何部分与时间 x 的任何部分共同，那么 vx 将取值 0，并将等价于“无时间”，或“永不”。

现在应当注意，命题“如果 Y 为真，则 X 为真”并不包含对命题 X 和 Y 中任何一个为真的断言。它同样可以与如下假定相一致：命题 Y 的真对于命题 X 的真是一个不可或缺的条件，在这种情况下我们将有 v = 1；或者与如下假定相一致：尽管 Y 表达了一个条件，当它实现时便使我们确信 X 为真，然而 X 仍可能为真而不蕴含该条件的实现，在这种情况下 v 表示一个时间，它的一部分包含在全部时间 x 之中；或者最后，与如下假定相一致：命题 Y 根本不为真，在这种情况下 v 表示某个时间，

其中没有任何部分与时间 x 的任何部分共同。所有这些情况都包含在 v 是不定时间符号这一一般假定之中。

5th.要表达一个同时具有条件和析取性质的命题。

条件命题的一般形式是："如果Y为真，则X为真"，其表达式按上一节为y = vx。我们完全可以类比于主命题中已确立的用法，将Y和X称为它们所进入的条件命题的项；我们还可以进一步采用普通逻辑的语言，将附有虚词如果的项Y称为该命题的"前件"，将项X称为"后件"。

现在，不要像上述情况那样让各项都是简单命题，而让每一项或其中任一项是一个析取命题，包含由小品词*either*、*or*连接的不同项，如下面的说明性例子所示，其中 X、Y、Z 等表示简单命题。

第一。如果 X 为真或 Y 为真，那么 Z 为真。
第二，若X为真，则或者Y为真，或者Z为真。
第三。如果 X 为真或 Y 为真，那么 Z 和 W 或者都为真，或者都为假。

显然，在上述情形中，前件与后件的关系并不因这些项之一或两者具有析取性质而受到影响。因此，只需按照已确立的原则，获得前件和后件的恰当表达式，以后件乘以不定符号v，并令结果相等即可。于是，对于上述命题，我们将分别得到方程，

$$\text{1st } x(1-y)+(1-x)y = vz.$$
$$\text{2nd.} x = v\{y(1-z)+z(1-y)\}.$$
$$\text{3rd.} x(1-y)+y(1-x) = v\{zw+(1-z)(1-w)\}$$

The rule here exemplified is of general application.

可以设想，析取元素和条件元素以上述不同的方式进入复合命题的表达式中，但我不知道人类理性的自然需求是否曾向我们呈现过这类情形，因此我将不对它们进行任何讨论。这一省略不会引起严重的困难，因为构成上述应用基础的一般原则是完全普遍的，稍加思考即可将它们适用于任何可以想象的情形。

13. 在上述表达规律中，解释的规律隐含地包含在内。方程

$$x = 1$$

必须被理解为表达命题 X 是真的；方程

$$x = 0,$$

该命题X为假。方程

$$xy = 1$$

will express that the propositions X and Y are both true together; and the equation

$$xy = 0$$

它们并非同时为真。

以同样的方式，方程

$$\begin{aligned} x(1-y) + y(1-x) &= 1, \\ x(1-y) + y(1-x) &= 0, \end{aligned}$$

将分别断言析取命题“或者 X 是真的，或者 Y 是真的”的真和假。方程

$$\begin{aligned} y &= vx \\ y &= v(1-x) \end{aligned}$$

将分别表达命题：“如果命题 Y 是真的，则命题 X 是真的。”“如果命题 Y 是真的，则命题 X 是假的。”

在本著作接下来的各章中，将经常出现这样的例子：方程某一特定成员的某些项受到不定符号 v 的影响，而另一些项则不受其影响。下面的实例将用以说明。假设我们有

$$y = xz + vx(1-z).$$

这里隐含的是，命题Y为真的时间，由X和Z同时为真的全部时间，加上X为真而Z为假的时间中的不定部分所组成。由此可以看出：第一，如果Y为真，则或者X和Z同时为真，或者X为真而Z为假；第二，如果X和Z同时为真，则Y为真。后者可称为反向解释，它在于从方程的第二项中取出前件，从第一项中取出后件。第二项中存在系数为一的项，使得这后一种解释方式成为可能。它所涉及的一般原则可表述如下：

14. 原则。--方程某一特定成员中任何一个或一些以其系数为单位的构成项，可以被当作一个命题的前件，而另一成员中的所有项构成后件。

因此方程

$$y = xz + vx(1-z) + (1-x)(1-z)$$

会有以下解释：

直接解释。--如果该命题是真的，那么或者和是真的，或者是真的而是假的，或者和都是假的。

反向解释。--如果或者和是真的，或者和是假的，则是真的。

这些部分解释的总和将表达所给方程的整个意义。

15. 我们可以在此再次提请注意这一评述：尽管时间的观念似乎是次级命题解释理论中的一个本质要素，但一旦表达和解释的规律被明确确立，它在实践上就可以被忽略。这些规律所产生的形式，似乎确实与一种完美语言的形式相对应。让我们设想任何一种已知的或现存的语言，摆脱了习语，去除了冗余，让我们用那种语言以最简明、最字面的方式表达任何给定的命题--最符合那些纯粹而普遍的思想原则的方式，所有语言都建立在那些原则之上，所有语言都体现着它们，但所有语言都或多或少偏离了它们。从这样一种语言过渡到分析的记号，只不过是用一组符号替换另一组符号，在形式或性质上都没有本质的变化。对于其间表达着关系的元素，无论是事物还是命题，我们应当用字母来替换；对于析取连词，我们应当写+；对于连接系词或关系符号，我们应当写=。这一类比我无需继续展开。它的真实性和完整性，将从研究那些在本书理论的后续应用中出现、并与那种不完美却高贵的思想工具--英语--进行更直接比较的表达形式中，变得更加明显。

16. 关于初级命题理论与次级命题理论之间的一般类比，我想在结束本章主题之前补充几点意见。

我们无疑可以像建立关于时间的次级命题理论那样，仅仅依据空间这一简单观念来建立关于初级命题的理论。也许，若果真如此做了，我们所考察的这种类比就会在某种程度上更贴近那些把空间和时间仅仅视为“人类知性的形式”、视为心灵的构造本身加于一切被提交给其领会之物上的知识条件的人的观点。但这种观点一方面无法得到证明，另一方面又把我们束缚于承认“处所”,τὸπoΎv，为存在的一个本质范畴。这个问题究竟是否如此，我理解，超出了我们官能所及的范围；但可以--而且我认为已经--确立的是：初级命题中的形式推理过程并不需要以我们所推理之事物在空间中的显现作为本质条件；这些过程将同样严格地适用于证明那些或许存在于可感广延领域之外的存在形式。这或许在某种

程度上与此类似：在许多已知的几何学与动力学例子中，我们能够对基于某种不同于感官所呈现、或想象力所能实现的理智空间概念的问题作出形式分析。[1]因此我认为，空间观念对于初级命题理论的发展并非本质性的，但我倾向于--尽管在如此极端困难的问题上希望谨慎发言--认为时间观念对于次级命题理论的建立是本质性的。似乎有理由认为，在不改变那些与推理相关的官能的情况下，空间向人类心灵的显现本可能不同于其实际所是，但没有(至少同样的)理由假定时间的显现本可能不同于我们所感知的那样。然而，暂且把这些或许并非完全不带僭妄的思辨搁置一旁，让我们确认：在初级命题中，记号1代表事物的全域而非它们所占据的空间，其真正根据在于，连接相应方程各成员的同一性符号=意味着它们所代表的事物是同一的，而不仅仅是它们被发现于空间的同一部分。让我们以同样方式确认：在次级命题中，记号1所代表的不是事件的全域，而是那些事件在其相继时刻与时期中展开于其中的永恒，其理由在于，连接相应方程逻辑成员的同一性符号所意味的不是那些成员所代表的事件是同一的，而是它们发生的时间是相同的。这些理由在我看来对当前的解释问题具有决定性。在先前一部论此主题的著作(《逻辑的数学分析》，第49页)中，我遵循沃利斯关于假言命题还原的理论，曾把次级命题中的记号1解释为“情况”或“境况组合”的全域；但这种观点必然要求对“情况”或“境况组合”之所指作出定义；而且可以肯定，该词中超出时间观念之外所包含的一切，都与形式逻辑的对象无关，并限制着形式逻辑的过程。

1 空间在知觉中呈现给我们时具有长、宽、深三个维度。但在涉及曲面性质、固体绕轴旋转、弹性介质振动等一大类问题中，这一限制在分析研究中显得具有任意性；而且若只关注求解过程本身，便无法发现任何理由说明空间为何不能存在于四个或任何更多维度之中。如此提示的想象世界中的理智程序，可以借类比的最清晰之光加以领会。

空间在三个维度中的存在，以及古代宗教与哲学心灵对此的看法，由亚里士多德如此阐述：- Μεγέθος δὲτὸμὲν ἐφ῾ἓν, γραμμή τὸδ῾ ἐπὶδ῾νο ἐπίπεδον, τὸδ῾ ἐπὶτρία σνῶμα῾ Καί παρὰτα΄ντα ο΄νκ῾ἐσντιν῾ἄλλο μέγεθος, διὰτὸτριά πάντα εἰναι καὶτὸτρὶς πάντη.Κάθαπερ γάρ φασνι καὶοὶΠνθαγόρειοι, τὸπᾶν καὶτὰ πάντα τοῖς τρισνὶν ῾ὡρισνται.Τελεντὴγὰρ καὶμέσνον καὶἀρκὴτὸν ἀριθμὸν῾ἔκει τὸν το΄ παντός῾ τα΄ντα δὲτὸν τῆς τριάδος.Διὸπαρὰτῆς φ΄νσεως εἰληφότες῾ὥσνπερ νόμονς ἐκείνης, καὶπρὸς τὰς ἀγισντείας κρώμεθα τῶν θεῶν τ΄ψ ἀριθμ΄ψ το΄ντ΄ψ.- 《论天》,1。

第十二章

论所应采用的方法与过程
在次级命题的处理中被采用。

1. 由先前的研究(XI.7)已经表明，逻辑的字面记号的组合规律是相同的，无论这些记号是用于表达初级命题还是用于表达次级命题，两种情形之间唯一存在的差别是解释上的差别。同样已经确立(V.6)，每当不同的思想体系与解释体系同同一套形式规律--即关于记号之组合与使用的规律--相联系时，伴随的过程，即介于问题之初级条件的表达与其符号解的解释之间的过程，在两者中是相同的。因此，既然在初级命题与次级命题这两种形式中所表现的思想体系之间存在这种形式规律的共同性，那么我们在讨论前一类命题时所已确立并阐明过的过程，将无需任何修改而适用于后一类命题。

2. 因此，消元与展开这两个基本过程的规律，在次命题系统中与在初命题系统中是相同的。再者，已经看到(第六章命题2)，在初命题中，任何不含分数形式的给定方程的解释，都可以通过将它展开为一系列成分，并令每个系数不为零的成分等于0来实现。同样的方法也适用于次命题的方程，而它最终引导我们得到的解释结果，正如前一种情形(VI.6)一样，是一个共存否定的系统。但是，在前一种情形中，那些否定的力量消耗在某些事物类的存在上，而在后一种情形中，它则涉及包含在给定前提的项中的基本命题的某些组合的真。并且，正如在初命题中已经看到，否定系统可以转换为各种其他形式的命题(VI.7)等等，这里也会发现这种转换是可能的，唯一的区别不在于方程的形式，而在于其解释的性质。

3. 此外，如同在初始命题中一样，我们可以求得任一

元素进入一个方程组，用其余元素(VI.10)或任意选定数目的其余元素来表示，并将该表达式解释为一个逻辑推论，同样的目标可以通过同样的手段达成，只是解释不同而已，在次命题的系统中也是如此。将我们想要从最终解答中排除的那些元素消去，将系统归约为单个方程，代数求解及其展开为可解释形式的方式，与在讨论原命题时相应步骤没有任何不同。

然而，为了消除任何可能的困难，或许宜将处理次命题时所呈现的各种不同情形归入一条一般规则之下。

规则。--用符号表示给定的命题(XI.11)。

从含有不定记号 v的每一个方程中分别消去该记号(VII.5)。

消去那些希望从最终解答中排除的其余记号：在消元之前，始终先将那些含有待消去记号或诸记号的方程化为单一方程*(VIII.7)*。将所得各方程合并为单一方程 V = 0。

然后按照希望表达最终关系所采取的特定形式进行，如下--

1. 若以否定或否定系统的形式，展开函数，并将所有系数不为零的构成项等于*0*。

2. 若以析取命题的形式，将系数为零的那些构成项之和等于*1*。

第三，若采取具有简单元素的条件命题形式，以其为前件，如或 1 – x ，则确定该元素的代数表达式，并展开该表达式。

第四，若采取具有复合表达式的条件命题形式，以其为前件，如， xy +(1 – x)(1 – y) ，等等，则将该表达式等于一个新记号，并确定其作为将在后件中出现的诸记号的展开函数，或通过普通方法，或通过特殊方法(IX.9)。

第五，按(XI.13, 14)解释结果。

若仅欲确定某一特定基本命题为真或为假，则必须消去除以外的所有记号；于是方程 x = 1 将表明该命题为真， x = 0 表明其为假， 0 = 0 表明前提不足以确定其为真或为假。

4. 例1。--以下预言在西塞罗(Cicero)残篇《论命运》(De Fato)中成为一场奇特讨论的主题：--“Si quis(Fabius) natus est oriente Canicula, is in mari non morietur.”我将把本章的方法应用于它。令 y 表示命题“法比乌斯(Fabius)生于天狼星升起之时”;x 表示命题“法比乌斯将死于海中”。在说 x 表示命题“法比乌斯，等等”时，意思只是说 x 是一个如此被指定(XI.7)给上述命题的记号，以至于方程 x = 1 肯定、方程 x = 0 否定该命题的真理性。我们所得到的方程

discuss will be

$$y = v(1 - x). \tag{1}$$

And, first, let it be required to reduce the given proposition to a negation or system of negations (XII. 3). We have, on transposition,

$$y - v(1 - x) = 0.$$

Eliminating v,

$$\begin{aligned} y\{y - (1 - x)\} &= 0, \\ \text{or, } y - y(1 - x) &= 0, \\ \text{or, } yx &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

这个结果的解释是：--“法比乌斯生于天狼星升起之时并将死于海中，这不是真的。”西塞罗把这种形式的命题称为“Conjunctio ex repugnantibus”；并且他评论说，克律西波(Chrysippus)以为用这种方式就能回避他想象中存在于关于未来的偶然断言中的困难：“Hoc loco Chrysippus aestuans falli sperat Chaldaeos casterosque divinos, neque eos usuros esse conjunctionibus ut ita sua percepta pronuntient: Si quis natus est oriente Canicula is in mari non morietur; sed potius ita dicant: Non et natus est quis oriente Caniculˆ a, et in mari morietur.O licentiam jocularem!...Multa genera sunt enuntiandi, nec ullum distortius quam hoc quo Chrysippus sperat Chaldaeos contentos Stoicorum causa fore.”--西塞罗《论命运》,7,8。

5.将给定命题化为析取形式。不进入(2)的第一项的那些成分为

$$x(1 - y), (1 - x)y, (1 - x)(1 - y).$$

由此我们得到

$$y(1 - x) + x(1 - y) + (1 - x)(1 - y) = 1. \tag{3}$$

其解释为：——要么法比乌斯是在天狼星升起时出生的，并且不会在海中丧生；要么他并非在天狼星升起时出生，并且会在海中丧生；要么他并非在天狼星升起时出生，并且不会在海中丧生。然而，在像上述这样的情况中，即存在仅因单一因素而彼此不同的成分时，正如我们所见（VII. 15），最方便的做法是将这些成分归入一个项。如果我们这样连接（3）的第一项和第三项，我们便得到

$$(1 - y)x + 1 - x = 1;$$

而如果我们同样连接第二和第三，我们就有

$$y(1 - x) + 1 - y = 1.$$

方程的这些形式分别给出如下解释--

或者法比乌斯并非生于昼星之下，且会死于海中，或者他不会死于海中。

或者法比乌斯生于昼星之下，且不会死于海中，或者他并非生于天狼星之下。

显然，这些解释与前一个解释严格等价。

让我们以条件命题的形式确定从“法比乌斯将死于海中”这一假说得出的结论。

在方程(2)中，该方程表达了从原方程中消去v的结果，我们必须设法确定x作为y的函数。

我们有

$$x = \frac{0}{y} = 0y + \frac{0}{0}(1-y) \text{ on expansion,}$$

或

$$x = \frac{0}{0}(1-y);$$

其解释为，--若法比乌斯将死于海中，则他并非生于天狼星升起之时。

这些例子在某种程度上说明了前几节中所建立的原始命题与次命题之间的联系，这种联系的两个显著特征是过程的一致性和解释的类比性。

6.例2。--在柏拉图《理想国》第二卷中有一个著名的论证，其目的在于证明神性的不变性。这既是一个极好的例子，展示了柏拉图从熟悉事例出发进行细致归纳以得出一般原则，也展示了他从中推出其目标所要确立的特定推论时那种清晰而连贯的逻辑。该论证包含在以下对话中：

“凡偏离其固有形式的东西，难道不是要么被自身、要么被另一事物所改变吗?必然如此。处于最佳状态的事物难道不是最少被改变和扰乱的么，比如身体被食物饮料、劳作所改变，每一种植物被热和风以及诸如此类的影响所改变?最健康最强壮的难道不是最少被改变的么?当然。来自外部的任何麻烦难道不是最少扰乱和改变那最强壮最智慧的灵魂么?至于一切制成的器皿、家具和衣物，按照同样的原则，那些制作精良、状况良好的，难道不是最少被时间和其它意外所改变的么?正是如此。凡是处于正确状态的东西，无论出于自然、出于技艺，还是兼而有之，都最少接受来自任何其它事物的改变。看来如此。但神和神圣事物在一切意义上都处于最佳状态。当然。那么，按这种方式，神应当最少承受许多形式么?确实最少。再者，他应当转化和改变自身么?显然，如果他终究被改变，他就必然如此。那么他是把自身改变为更好更美的东西，还是改变为更坏更卑下的东西呢?如果他改变，就必然变为更坏的。因为我们绝不会说神缺乏美或德性。你说得极为正确，我说，并且

事情既然如此，阿德曼图斯啊，在你看来，神或人会自愿在某种意义上使自己变坏吗?他说，不可能。那么我说，神竟会希望改变自己，这是不可能的；但每一位永远是最美最好的，永远绝对保持同一形式。”

上述论证的前提如下：1. 如果上帝经历变化，祂要么由自身、要么由

另一个。

第二，如果祂处于最佳状态，祂就不会被另一个所改变。

3. 神处于最佳状态。

第四，如果神被自己改变，那么他是被改变到更坏的状态。

第五，如果他自愿行动，他就不会陷入更糟的状态。

第六，神性者自愿而行。

让我们将这些前提的元素表达如下：令x表示命题“上帝遭受变化”。

y，祂被自己改变。z，祂被另一

个改变。s，祂处于最佳状态。

他变得更糟了。

他自愿行动。

于是，用符号语言表达的前提在消去不定类记号v之后，得出以下方程：

$$xyz + x(1-y)(1-z) = 0, \tag{1}$$
$$sz = 0, \tag{2}$$
$$s = 1, \tag{3}$$
$$y(1-t) = 0, \tag{4}$$
$$wt = 0, \tag{5}$$
$$w = 1. \tag{6}$$

保留x，我将依次消去z、s、y、t和w(这是那些记号在上述系统中出现的顺序)，并解释相继的结果。

从(1)和(2)中消去z，我们得到

$$xs(1-y) = 0. \tag{7}$$

Eliminating s from (3) and (7),

$$x(1-y) = 0. \tag{8}$$

Eliminating y from (4) and (8),

$$x(1-t) = 0. \tag{9}$$

从(5)和(9)中消去t,

$$xw = 0. \tag{10}$$

从(6)和(10)中消去w,

$$x = 0. \tag{11}$$

这些方程，从(8)开始，给出以下结果：

由(8)我们有x = 00y,因此，如果上帝遭受变化，则祂被自己改变。

由(9),x = 00t,如果上帝遭受变化，则祂变为更坏状态。

由(10),x = 00(1−w).如果上帝遭受变化，则祂不行动心甘情愿地。

由(11)可知，神性不变。这是柏拉图的结果。

现在我已在前文指出，消元的顺序无关紧要。在目前情形下，让我们以相反顺序消去同样的记号，从w开始，以验证这一事实。所得方程为，

$$t = 0, y = 0, x(1 - x) = 0, z = 0, x = 0;$$

yielding the following interpretations:

上帝不被变为更坏的状态。祂不被自己改变。如果祂遭受变化，则祂被另一个改变。祂不被另一个改变。祂不遭受变化。

我们由此通过另一条途径得出了相同的结论。

尽管作为对该方法力量的展示，上述例子价值不大，但它们与更复杂的实例一样，足以说明其性质和特点。

7. 作为初级命题体系与次级命题体系之间类比的最后一个实例，可以指出，在后一体系中，基本方程，

$$x(1 - x) = 0,$$

也可以得到解释。它表达了这条公理：一个命题不能同时为真和假。将此与相应的解释(III.15)相比较。以如下形式求解

$$x = \frac{0}{1 - x} = \frac{0}{0}x,$$

通过展开式，它提供了各自的公理："一物即是其所是："如果一个命题是真的，它就是真的："即所谓"同一性原则"的各种形式。关于这些公理的本性和价值，人们持有最为对立的意见。有些人把它们视为哲学的精髓和骨髓。洛克(Locke)为它们专门写了一章，标题为"论琐屑的命题"。[1]在这两种观点中，似乎都混杂着真理和错误。若被视为取代经验，或为学派空洞无聊的饶舌提供材料，这样的命题比琐屑更糟。另一方面，若被视为与思维本身的规律和条件密切相连，它们至少上升到一种思辨的重要性。

1 《人类理解论》，第四卷，第八章。

第十三章

对塞缪尔博士部分内容的分析
克拉克的《上帝的存在与属性之证明》，以及斯宾诺莎《以几何次序证明的伦理学》的一部分。

1. 在以下各章的探讨中，我打算遵循的一般次序如下。我将考察上述论著中某些一般命题的证明究竟涉及哪些实际前提，无论这些前提是明确表述的还是隐含的。所谓实际前提，我指的是在论证过程中被假定而未经证明、并被用作最终结论所依据的基础之一部分的那些命题。如此确定的前提，我将用记号的语言加以表述，然后运用本书前面各章所阐明的方法，从这些前提中推出它们所蕴含的最重要的推论，作为对作者们实际引出的那些特定推论的补充。在某些情形下，我将通过删去其中所包含的某一事实或原则，或者通过增加或替换某一新命题，来修改这些前提，并确定这样的改变如何影响最终的结论。在追求这些目标的过程中，我不承担这样的任务--除非附带地--即探究这些著名著作中所奠定的形而上学原则在多大程度上值得信赖，而只在于确定从给定前提中可以正当地引出什么结论；并且在这样做时，例示我们在最终结论或归结命题的诸元素的选择和次序方面所拥有的完全自由，也就是说，在确定哪些基本命题为真或为假，以及哪些在给定限制下或在给定组合中为真或为假方面的自由。

2. 这项探究的主要实际困难，不在于前提一旦确定后方法的应用，而在于确定前提是什么。在被视为应用于形而上学问题的最严格的推理实例中，偶尔会发现不同的思路交织在一起；某些特殊但本质的

论证部分是以插入语的方式给出的，或者偏离了论证的主线；一个前提的含义可能在某种程度上是模糊的；而且不乏这样的情况：按照形式推理的严格法则来看，论证是不正确的或不能得出结论的。确定并清晰地展示一个论证的真正前提的困难可能，

在此类情形下，可能相当可观。但这是一切想要确定某一特定结论是否得到证明的人都必须克服的困难，无论他们准备或倾向于赋予那进一步的推理过程以何种形式。因此，这是一项并非本书方法所特有的困难，尽管它与此方法的关联比与任何其他方法的关联表现得更为明显。的确，这种关联如此紧密，以至于采用本论著的方法，若不对一个结论所依据的一切前提作出清晰的领会和精确的陈述，甚至不可能对该结论的有效性形成哪怕一种猜测。然而，在更为通常的程序中，没有什么比这更为常见的了：考察一连串论证中的某些步骤，并由此对整体的范围形成一种模糊的一般印象，而全然不对其所涉及的前提作任何这样的预备性的、彻底的分析。

对证明的真正前提作严格确定的必要性不应被视为一种祸害；尤其是因为，当这一任务完成之后，一切怀疑或歧义的根源都被消除了。在采用本论著的方法时，前提排列的次序、它们所呈现的联结方式，以及一切类似的情形，都可以被视为无关紧要的，而推理的过程则以一种几乎可以称为机械的精确性来进行。

3.《上帝的存在与属性的证明》由一系列命题或定理组成，其中每一个都借助前提得到证明，而这些前提大多可分解为两个不同的类别，即观察事实，如物质世界的存在、运动的现象等，以及假设性的原则，其权威性和普遍性被假定为`*a priori*得到承认的。当然，假定推理正确，证明的有效性实际上取决于后者的真理性。但无论人们对其在这方面的主张作何想法，无可置疑的是，作为一种理智的成果，它的价值非常高。尽管构成它的那些论证序列一般安排得并不十分清晰，它们几乎总是正确逻辑的范例，并且展现出一种领会的精微和一种推理的力量，此二者鲜有匹敌，也许从未被超越。我们在其中看到了那些理智努力的极致，这些努力是在形而上学探究的领域中被唤醒的，当时假设性原则的统治所受的质疑比现在少，而新近兴起的数学物理学派的严格证明似乎为其方向提供了一个典范。由于这个理由(更不用说它所论述的主题的尊严)，在我看来它们值得高度考虑；我并不认为对其中某些花费一番仔细的分析是一项徒劳或多余的任务。

4. 本尼迪克特·斯宾诺莎的《伦理学》是一部论著，其目的是

证明上帝与宇宙的同一，并在这一定义之上建立一套道德和哲学体系。对其主要论点的分析极为困难，不是由于它所涉及的各个命题的复杂性，而是由于使用了模糊的定义和公理，而这些公理由于同样缺乏清晰性，令人难以确定我们应当接受还是拒绝。塞缪尔·克拉克博士的推理部分地是言辞上的，而斯宾诺莎的推理则在更大得多的程度上是如此；也许这就是为什么在某些人看来，它似乎具有一种形式上的说服力，而实际上它并无正当理由要求这种说服力。然而，这些要点将在适当的地方加以考虑。

克拉克的论证。

命题一。

5. “某物自永恒以来就存在。”证明如下：--

“因为既然现在有某物存在，那么显然总有某物存在。否则，现在存在的事物必定是从无中产生的，绝对地且无原因地产生的。这在措辞上是明显的矛盾。因为说一个事物被产生，却又说该产生根本没有原因，就等于说某物在无物使其产生时被产生，也就是说，在它根本未被产生的同时被产生。凡存在者，其存在都有原因，或者在其自身本性的必然性中，因而它必定是自存的、永恒的；或者在某个其他存在者的意志中，而那个其他存在者必定至少在自然秩序和因果关系的顺序上先于它存在。”

现在让我们来分析上述论证。其第一句话可以分解为以下命题：

1. 有物存在。

第二，如果某物存在，那么要么某物始终存在，要么现在存在的事物必定是从无中产生的。

论证的下一部分包括一个证明，即上述第二种选择，即“现在存在的事物是从无中产生的”，是不可能的，它可以形式化地分解如下：

第三，如果现在存在的事物是从无中产生的，那么就有某物被产生出来，并且同时有某物是由无产生的。

第四，如果某事物未受任何事物影响，则它未被影响

根本

这一论证的第二部分似乎只是对所要证明的论点的假定，或者是一种通过不同的文字表述使该论点更清楚的尝试。

论证的第三也是最后一部分包含了对以下两者之一为真的明确证明：所要证明的原始命题，即“某物一直存在”，或者论证第二部分所证明的论点，即“现在存在的事物是从无中产生的”这一假说的不可成立性。它可以分解如下：--

第五。如果某物存在，那么它要么凭借自身本性的必然性而存在，要么凭借另一存在者的意志而存在。

6. 若某物依其自身本性的必然性而存在，则总有某物存在。

第七，如果它凭另一个存在者的意志而存在，那么“存在的事物是从无中产生的”这一命题就是假的。

最后一个命题在克拉克博士的原文中并非以相同形式表述；但他所表述的关于另一个存在者先前存在的结论，显然意在等同于对“现在存在的事物是从无中产生的”这一命题的否定。

因此可以看出，论证由两条不同的论证线索组成：其中一条线索包含我所标定的论证的第一部分和第二部分；另一条线索包含第一部分和第三部分。让我们考虑后一条线索。

前提是：--第一，有某
物存在。

第二，如果某物存在，那么要么某物始终存在，要么现在存在的事物是从无中产生的。

第三，如果某物存在，那么它要么依据其自身本性的必然性而存在，要么依据另一存在者的意志而存在。

第四，若某物依其自身本性的必然性而存在，则总有某物存在。

第五，如果它凭另一个存在者的意志而存在，那么，现在存在的事物是从无中产生的这一假说就是假的。

我们现在必须用符号来表示上述命题。

让

x = 某物存在。y = 某物一直存在。z = 现在存在的事物是从无中产
生的。p = 它因其自身本性的必然性而存在

(即上文所说的某物)。q = 它因另一个存
在者的意志而存在。

必须理解，通过“设x = ‘某物存在’”这一表述，所意味的不过是x是该命题的代表记号(XI.7)，方程x = 1、x = 0分别宣告其真和其假。前提的方程为：--

1st. $x = 1;$
2nd. $x = v[y(1-x) + z(1-y)];$
3rd. $x = v[p(1-q) + q(1-p)];$
4th. $p = vy;$
5th. $q = v(1-z);$
and on eliminating the several indefinite symbols v, we have

$$1 - x = 0; \tag{1}$$
$$x[yz + (1-y)(1-z)] = 0; \tag{2}$$
$$x[pq + (1-p)(1-q)] = 0; \tag{3}$$
$$p(q-y) = 0; \tag{4}$$
$$qz = 0. \tag{5}$$

6. 首先，我将考察从上述内容中是否能推出任何结论，涉及由记号y、z、p、q所代表的单个命题的真或假，即以下命题：“某物一直存在”;“现在存在的事物是从无中产生的”;“存在着的某物因其自身本性的必然性而存在”;“存在着的某物因另一个存在者的意志而存在”。

为此，我们必须分别消去除y以外的所有记号，消去除z以外的所有记号，等等。所得方程将判定是否存在任何这样的单独关系。

要从(1)、(2)和(3)中消去x，只需在
(2) 以及(3)由(1)导出的x的值。我们得到如下结果，

$$yz + (1-y)(1-z) = 0. \tag{6}$$
$$pq + (1-p)(1-q) = 0. \tag{7}$$

为消去p，由(4)与(7)相加得，

$$p(1-y) + pq + (1-p)(1-q) = 0; \tag{8}$$

由此我们求得，

$$(1-y)(1-q) = 0. \tag{9}$$

To eliminate q from (5) and (9), we have

$$qz + (1-y)(1-q) = 0;$$

由此我们求得

$$x(1-y) = 0. \tag{10}$$

There now remain but the two equations (6) and (10), which, on addition, give

$$yz + 1 - y = 0.$$

Eliminating from this equation z, we have

$$1 - y = 0, \text{or, } y = 1. \tag{11}$$

Eliminating from the same equation y, we have

$$z = 0. \tag{12}$$

(11)的解释是某物一直存在。 (12)的
解释是

存在的事物并非从虚无中产生。

接下来恢复方程组(6)、(7)，连同两个方程(4)、(5)，让我们确定分别涉及p和q的两个方程。

为消去y，我们由(4)和(6)得，

$$p(1-y)+yz+(1-y)(1-z)=(0);$$

由此

$$(p+1-z)z=0,\text{or, }pz=0. \tag{13}$$

To eliminate z from (5) and (13), we have

$$qz+pz=0;$$

由此我们得到，

0 = 0.

那么只剩下方程(7)，从中消去q，我们得到0 = 0作为关于p的最终方程。

因此，从肯定命题"存在着的某物存在于其自身本性的必然性中"的简单真或假的前提中，不能推出任何结论。并且，由于在消去p之后，对于q中的最终方程得到同样的结果0 = 0，所以也可推出，从前提中不能推出关于命题"存在着的某物通过另一个存在者的意志而存在"的简单真或假的任何结论。

在连接由基本记号所代表的多个命题的关系中，除了由方程(7)所表示的连接p和q的关系之外，无需考虑其他关系，因为其余记号所代表的命题是绝对真或绝对假的，与这里所说的那种连接无关。(7)的解释，以如下形式给出

$$p(1-q)+q(1-p)=1,\text{ is,}$$

The something which is, either exists in the necessity of its own nature, or by the will of another being.

我以或许不必要的详尽和冗长展示了上述分析的细节，因为在接下来的例子中，我打算更多地指出获得结果的步骤，而不是冒着令人厌倦的频繁重复的危险。上述方法应用所得出的结论很容易通过普通推理加以验证。

读者将不难把该方法应用于克拉克博士第一命题中所涉及的另-系列前提，并从中推出上述分析所得出的前两个结论。

命题二。

7. 某个不可改变且独立的存在者自永恒以来就一直存在。用以证明上述命题的前提如下：第一，某物一直存在。

第二，如果某物一直存在，那么要么存在某个不变且独立的存在者，要么全部存在物都被包含在一个可变且依赖的存在者的序列之中。

第三，如果宇宙由一系列可变且依赖性的存在者构成，那么这一序列要么有一个来自外部的因，要么有一个来自内部的因。

第四，它没有外在的原因(因为根据假设，它包含了，
(一切存在之物)。如果没有任何部分是必要的，
那么整体也不可能是必要的)。

第五。它没有来自内部的原因(因为没有任何部分是必然的，并且，为简洁起见，省略第四和第五前提中括号内所包含的辅助证明，我们可以将前提表示如下：

设= 始终存在某种事物。

y = 存在某个不变且独立的存在者。z = 存在一系列可变且依存的存在者。p = 该系列有一个来自外部的因。

q = 该系列有一个来自内部的因。于是我们得到如下方程组，即：

$$\begin{aligned} \text{1st. } x &= 1; \\ \text{2nd. } x &= v\{y(1-z)+z(1-y)\}; \\ \text{3rd. } z &= v\{p(1-q)+(1-p)q\}; \\ \text{4th. } p &= 0; \\ \text{5th. } q &= 0: \end{aligned}$$

将其分别消去不定符号v后，得到

$$l - x = 0; \tag{1}$$
$$x\{yz + (1-y)(1-z)\} = 0; \tag{2}$$
$$z\{pq + (1-p)(1-q)\} = 0; \tag{3}$$
$$p = 0; \tag{4}$$
$$q = 0. \tag{5}$$

从上述系统中消去x、p、q和y，便导致方程

$$z = 0.$$

And the elimination of x, p, q, and z, conducts in a similar manner to the equation

$$y = 1.$$

这些方程各自的解释是：第一。存在事物的整体并未被理解为一个可变化且相互依赖的存在者的序列。

第二，存在某个不变且独立的存在者。后者即克拉克博士所证明的命题。由于通过上述分析，由字母记号x、y、z、p、q所表示的所有命题都被确定为绝对真或假，因此无需探究是否存在任何进一步的关系将这些命题联系起来。

对于命题II还给出了另一个证明，为简洁起见我略过不提。可以注意到，“无限序列的不可能性”--其证明构成克拉克论证的一部分--通常被假定为形而上学的一条基本原理，并被扩展到因果关系问题之外的其他问题。亚里士多德用它来确立证明的第一原理的必然性；[1]人类行为中目的(善)的必然性，等等。[2]也许没有哪条原理在他的著作中被更频繁地引用。经院哲学家同样用它来证明属和种的无限从属关系的不可能性，并由此证明共相的必然存在。显然，我们无法形成一个关于无限序列的确定而完整的概念，即无法把它作为一个整体来把握，这种不可能性被与观念本身的逻辑不一致或矛盾混为一谈了。

8.以下论证的分析依赖于初阶命题的理论。

命题三。

那个不变且独立的存在者必定是自存的。前提是：--

1.每个存在者要么必定是从无中产生的，要么必定是由某个外部原因产生的，要么必定是自存的。

2. 没有任何存在者是从虚无中产生的。

3.那个不变且独立的存在者不是由外部原因产生的。

为了上述内容的符号表达，让我们假设，

x = 从无中产生的存在者。y = 由外部原因产生的存在者。z = 自存的存在者。w = 那个不变且独立的存在者。

---

1 形而上学，III.4；后分析篇 I, 19, et seq。

2 尼各马可伦理学，第一卷，第二章。

于是我们有

$$x(1-y)(1-z)+y(1-x)(1-z)+z(1-x)(1-y)=l, \quad (1)$$
$$x=0, \quad (2)$$
$$w=v(1-y), \quad (3)$$

从最后一个式子中消去 v,

$$wy=0. \quad (4)$$

每当如上所述某个记号的值被给定为0或1时，最好通过简单代入来消去它。于是消去x便得到

$$y(1-z)+z(1-y) = 1; \quad (5)$$
$$\text{or, } yz+(1-y)(1-z) = 0. \quad (6)$$

将(4)与(6)相加，并消去y，我们得到

$$w(1-z)=0,$$
$$\therefore w=vz;$$

其解释是--那个不变且独立的存在者是
必然自存。

对于(5)，按其实际形式，其解释是--每个存在者要么是由外部原因产生的，要么是自存的。

9.在塞缪尔·克拉克博士对上述命题的评论中，有一段值得注意的论证，旨在证明物质世界不是上面所说的那个自存的存在者。我所指的那段文字如下：

“如果假定物质必然存在，那么在这种必然存在中，要么包含引力，要么不包含。如果不包含，那么在一个纯粹物质的、没有智能存在者主宰的世界中，就永远不可能有任何运动；因为运动，正如已经表明并在当前问题中已被承认的那样，其本身并非必然。但如果引力的能力被包含在物质所谓的必然存在之中：那么，由此必然推出必定存在真空(正如无与伦比的艾萨克·牛顿爵士已充分证明，如果引力是物质的一种普遍性质或属性，就必定存在真空)，同样也可推出，物质不是必然存在者。因为如果真空确实存在，那么物质不存在显然就不仅仅是可能的了。”--(第25、26页)。

第一，如果物质是必然存在者，那么引力属性要么是
必然在场，或者必然不在场。主宰的理智，运动不
存在。

第二，如果引力必然不存在，且世界不受任何

第三，如果引力的属性必然存在，则
真空是必要的。
第四，如果真空的存在是必然的，那么物质就不是必然的存在。
第五，如果物质是必然存在者，那么世界就不受一个主宰者的支配。
智力。
6. 运动存在。
在上述前提中，前四个在证明中被表达出来；第五个隐含在其第一句和第二句的关联之中；第六个表达了一个事实，作者似乎认为不必陈述该事实，但它显然是其推理依据的一部分。让我们

用以下方式表示基本命题：

设= 物质是必然的存在者。
引力必然存在。
引力必然不存在。
z = 世界仅仅是物质的，不受任何主宰的理智支配。w = 运动存在。

v = 真空是必需的。

那么，前提系统将由以下方程表示，
其中q被用作不定时间的符号：

$$\begin{aligned} x &= q\{y(1-t)+(1-y)t\}. \\ tz &= q(1-w). \\ y &= qv. \\ v &= q(1-x). \\ x &= qz. \\ w &= 1. \end{aligned}$$

由此，如果我们消去记号q，便得到如下系统，
即：

$$x\{yt+(1-y)(1-t)\}=0. \tag{1}$$
$$tzw=0. \tag{2}$$
$$y(1-v)=0. \tag{3}$$
$$vx=0. \tag{4}$$
$$x(1-z)=0. \tag{5}$$
$$1-w=0. \tag{6}$$

Now if from these equations we eliminate w, v, z, y, and t, we obtain the equation

$$x=0,$$

它表达了命题物质不是必然存在者。这是克拉克博士的结论。如果我们试图消去任何其他五个记号组成的集合(除了集合v、z、y、t和x，那将给出w = 1)，我们得到形式为0 = 0的结果。由此看来，不存在表达由单个记号所标示的任何基本命题的绝对真或假的其它结论。

在由涉及两个记号的方程所表达的结论中，只存在以下这个，即：--如果世界仅仅是物质的，不受主宰的理智支配，那么引力并非必然不在场。这个结论由以下方程表达

$$tz = 0, \text{ whence } z = q(1 - t).$$

如果在上述分析中我们删去表达运动存在这一事实的结尾前提，并且不去触动其余前提中所体现的假说性原则，那么便会得出一些值得注意的结论。我将在下一章中提请注意这些结论。

10.对于克拉克博士论证的其余部分，我将简要陈述其实质和关联，只详述其中某些比其他部分更为复杂的部分，它们能更好地说明本书的方法。

在命题iv.中表明，自存之物的实体或本质是不可理解的。所运用的推理要旨是：我们对所有其他事物的本质本性一无所知--那么，对自存之物的本质就更是如此了。在命题v.中，有人主张“尽管自存之物的实体或本质本身对我们来说绝对不可理解，但其本性的许多本质属性以及其存在都是可以严格证明的”。在命题vi.中，有人论证“自存之物必然无限且无所不在”；并主张其无限性必定是“充满的无限性以及广袤的无限性”。论证所依据的基础是：存在的绝对必然性必定独立于时间、地点和环境，不受限制，因而排除一切不完美。由此推断，自存之物必定是“一个最单纯、不变、不朽的存在者，没有部分、形状、运动或我们在物质中发现的任何其他此类属性”。

实际使用的前提可展示如下：

1. 如果一个有限的存在者是自存的，那么设想它不存在便是一个矛盾
存在。

2. 一个有限的存在者可以不在某一个地方，这并不矛盾。

3.可以无矛盾地从某一地点缺席者，也可以无矛盾地从一切地点缺席。

4.可以无矛盾地从一切地点缺席者，也可以无矛盾地被设想为不存在。

让我们假设

x = 有限的存在者。

y = 自存之物。

z = 假设其不存在就会陷入矛盾的事物。w = 可以从一个地方无矛盾地缺席的事物。t = 可以从每个地方无矛盾地缺席的事物。

我们已表述了上述内容，并消去了不定符号，

$$xy(1-z) = 0. \tag{1}$$
$$x(1-w) = 0. \tag{2}$$
$$w(1-t) = 0. \tag{3}$$
$$tz = 0. \tag{4}$$

依次消去t、w和z，我们得到

$$xy = 0,$$
$$\therefore y = \frac{0}{0}(1-x);$$

其解释为--凡是自存者皆为无限。

在命题 vii.中，论证了自存的存在者必然是一。证明的顺序是：自存的存在者是“必然存在的”,“自身中的绝对必然性是单纯且齐一的，没有任何可能的差异或多样性”，所有“存在的多样性或差异”都意味着依赖；因此“任何必然存在的东西都是自存存在者的一个单纯本质”。

结论也由以下前提推出：--

1. 如果有两个或两个以上必然且独立的存在者，则其中任何一个可以设想其单独存在。
2. 如果二者中任一可被假定为单独存在，那么以下情况并不构成矛盾：假设另一个不存在。
3. 如果假设这一点不是矛盾，那么就没有两个必然的。让我们将基本命题表示如下：--

和独立的存在者。

x = 存在两个必然的独立存在者。y = 两者中的任何一个都可以被假设为单独存在。

z = 假设另一个不存在并不矛盾。

于是，我们按先前的方式继续进行，

$$x(1-y) = 0. \tag{1}$$
$$y(1-z) = 0. \tag{2}$$
$$zx = 0. \tag{3}$$

消去 y 与 z，得

$$x = 0.$$

由此可知，不存在两个必然且独立的存在者。

11. 众所周知，前两个命题所依据的前提，曾遭到巴特勒主教(Bishop Butler)在一些著名的书信中的反对，当时《论证》(Demonstration)一书出版之际，他正在一所非国教徒学院求学；这些书信连同克拉克博士(Dr.Clarke)对它们的答复，通常附于该书的各版本之后。真正的问题在于这一原则的有效性，即“凡在整体上绝对必然者，在空间的每一部分、在时间的每一瞬间亦绝对必然”--这一原则为克拉克博士的推理所假定，并在其答复巴特勒第一封信时明确陈述。在其第二封信中，巴特勒说：“我并不设想遍在的观念包含于自存的观念之中，或直接由之推出，除非是就凡存在者必存在于某处而言。”这就是说，必然存在蕴涵着存在于空间的某一部分，而非每一部分。看来克拉克博士始终未能有效地驳倒这一反对意见。整篇通信极为奇特而有趣。巴特勒的反对意见，恰恰是一个敏锐的心灵在深信以下信念时所能想到的：对真理的成功探究，主要取决于对第一原则的审视，而非任何推理的机械技巧。而克拉克博士的答复，尽管不能被认为是令人满意的，却在显著程度上显示出那种独特的心智力量，这种力量在引发这场讨论的那部著作中显而易见。

12. 在命题 viii.中，论证了自存且为万物原始原因的存在者必定是一个有理智的存在者。

为支持这一命题而提出的主要论据是：既然原因比结果更为优越，那么作为万物的原因和本原的自存存在者，其自身必定包含万物的完善性；而理智是在创造的一部分中所显现的完善性之一。进一步论证说，这种完善性不是形状、可分性或任何已知的物质属性的样式；因为这些不是完善性，而是限制。此外还补充了后验论证，即从宇宙构造中设计的显现而来的论证。

然而，附有一个独立的论证，基于宇宙中运动的现象性存在，来证明一个有理性的自存存在者的存在。我将简要展示这一证明，并将本论著的方法应用于它。

论证(略去不重要的解释)如下：--

“世界上显然有运动这样的东西存在；它要么在某个时候开始，要么是永恒的。如果它在时间中开始，那么问题就得到了承认：第一原因是理智的存在者。.....相反，如果运动是永恒的，那么它要么是由某个永恒的有理智的存在者永恒引起的，要么它自身必然是自存的，要么，没有任何

在其自身本性中具有必然性，且没有任何外在的必然原因，那么它必定通过一种无尽相继的传递而从永恒就已存在。如果运动是由某个永恒理智的存在者永恒地引起的，这同样是在当前争论中把问题本身当作论据。如果运动是自身必然且自存的，那么由此推出：设想任何物质处于静止状态必是术语上的矛盾。然而同时，由于这种自存运动的确定必定在一切方面同时发生，其结果将不过是永恒的静止.....但如果说，运动在其自身本性中没有任何必然性，也没有任何外在的必然原因，仅仅通过一种无尽相继的传递而从永恒就已存在，正如斯宾诺莎(Spinoza)颇为前后不一地似乎所断言的那样，那么这我已先前表明(在本篇第二一般命题的证明中)是明显的矛盾。因此，剩下的只能是：运动必定必然地由某种有理智的东西原初地引起。”

上述论证的前提可如此排列：

1. 如果运动在时间中开始，第一原因是理智的存在者。2. 如果运动从永恒就存在，那么它要么是由某个永恒的有理智的存在者永恒引起的，要么它是自存的，要么它必定通过无尽相继的传递而存在。

3. 如果运动是由一个永恒的有理智的存在者永恒引起的，那么第一原因是理智的存在者。

4. 如果它是自存的，物质既静止又非静止。

5. 运动通过无尽相继的传递而存在，同时它又不是自存的，并且不是由某个永恒的有理智的存在者永恒引起的，这是假的。

为了表达这些命题，让我们假设--

= 运动始于时间(因而)

1 – x = 运动从永恒以来就存在。

y = 第一原因是理智的存在者。p = 运动是由某个永恒的有理智的存在者永恒引起的。

q = 运动是自存的。

r = 运动通过无尽相继的传递而存在。s = 物质处于静止。

前提的方程于是为--

$$
\begin{aligned}
x &= vy. \\
1-x &= v\left\{p\left(1-q\right)\left(1-r\right)+q\left(1-p\right)\left(1-r\right)+r\left(1-p\right)\left(1-q\right)\right\}. \\
p &= vy. \\
q &= vs\left(1-s\right)=0. \\
r\left(1-q\right)\left(1-p\right) &= 0.
\end{aligned}
$$

由于根据第四个方程，q = 0，我们将 q 的值代入后得到

在剩余的方程中，该系统

$$x = vy, \qquad 1 - x = v\{p(1-r) + r(1-p)\},$$
$$p = vy, \qquad r(1-p) = 0,$$

从中消去不定记号 v，我们得到最终的化简系统，

$$x(1-y) = 0, \tag{1}$$
$$(1-x)\{pr + (1-p)(1-r)\} = 0, \tag{2}$$
$$p(1-y) = 0. \tag{3}$$
$$r(1-p) = 0. \tag{4}$$

我们将首先寻求 y 的值，这是克拉克博士结论中所涉及的记号。首先，从(1)和(2)中消去 x，我们有

$$(1-y)\{pr + (1-p)(1-r)\} = 0. \tag{5}$$

接下来，为了从(4)和(5)中消去r，我们有

$$r(l-p) + (1-y)\{pr + (1-p)(1-r)\} = 0,$$
$$\therefore \{1 - p + (1-y)p\} \times (1-y)(1-p) = 0;$$

whence

$$(1-y)(1-p) = 0. \tag{6}$$

Lastly, eliminating p from (3) and (6), we have

$$1 - y = 0,$$
$$\therefore y = 1,$$

它表达了所需的结论，第一原因是理智的现在让我们考察从前提中还能推出什么其他结论。如果我们将刚刚求得的值代入方程(1)、(2)、(3)、(4)中的 y,

存在。

它们被简化为以下这对等式，即，

$$(1-x)\{pr + (l-p)(l-r)\} = 0, \quad r(l-p) = 0. \tag{7}$$

从这些方程中消去x，我们得到

$$r(1-p) = 0, \text{ whence } r = vp,$$

它表达了结论，如果运动通过无尽相继的传递而存在，那么它是由一个永恒的有理智的存在者永恒引起的。

再次从给定的配对中消去r，我们得到

$$(1-x)(1-p) = 0,$$
$$\text{or, } 1 - x = vp,$$

它表达了结论，如果运动从永恒就存在，那么它是由某个永恒的有理智的存在者永恒引起的。

最后，从同一原始对中消去p，我们得到

$$(1-x)r = 0,$$

which, solved in the form

$$1 - x = r(1-r),$$

gives the conclusion, *If motion has existed from eternity, it has not existed by an endless successive communication.*

Solved under the form

$$r = vx,$$

上述方程导致等价的结论，如果运动通过无尽相继的传递而存在，那么它在时间中开始。

13. 现在读者会看出，上述四个结论中的第一个和最后一个彼此不一致。从运动通过无尽的相继传递而存在这一假说得出的两个推论，即：第一，它是由一个永恒的理智存在者永恒地引起的；第二，它在时间中开始--显然相互冲突。然而，它们都是从原初前提得出的严格演绎。它们之间的对立不是逻辑的对立，而是技术上所称的实质的对立。然而，这种对立本可以在前提中被形式地陈述出来。我们本可以给它们加上一个形式命题，断言“凡是由一个永恒的理智存在者外在地引起的东西，都不在时间中开始”。假如这样做了，那么我们的结论中现在所出现的那种对立就不会出现。形式逻辑只能考虑被形式地表达出来的关系(VI.16)；因此，在特定事例中，可能有必要以形式的方式表达前提之间的某种联系，而这种联系即使没有实际陈述，也包含在所使用语言的真正含义之中。

To illustrate what has been said, let us add to the equations (2) and (4) the equation

$$px = 0,$$

它表达了上述所提及的条件。我们有

$$(1-x)\{pr + (1-p)(1-r)\} + r(1-p) + px = 0. \tag{8}$$

从中消去p，我们便简单地得到

$$r = 0,$$

它表达了命题，运动不是通过无尽相继的传递而存在。如果现在我们将 r 的值代入(8)，我们有

$$(1-x)(1-p) + px = 0, \text{ or, } 1 - x = p;$$

由此我们得到解释，如果运动从永恒就存在，那么它是由一个永恒的有理智的存在者永恒引起的；连同该命题的逆命题。

在命题 ix.中，论证了“万物的自存且原始的原因不是一个必然的动因，而是一个被赋予自由和选择的存在者”。证明主要基于他拥有理智，以及基于目的因的存在，这暗示着设计和选择。对于最高原因必然地运作以产生最好的东西这一反对意见，回答是：这是一种适宜性和智慧的必然性，而不是本性的必然性。

14. 在命题x中论证说，“自存的存在者，万物的最高原因，必定必然具有无限的能力。”论证的依据是：既然“万物的一切能力都从他派生”，那么没有任何东西能对他的意志的执行造成任何困难或抵抗。文中界定说，自存存在者的无限能力并不扩展到“制造一个蕴涵矛盾的东西”，也不扩展到做那“将蕴涵归于被赋予此种能力的存在者的不完善(无论是自然的还是道德的)之事”，但它确实扩展到创造物质，以及创造一种非物质的、能思的实体，该实体被赋予开始运动的能力以及意志或选择的自由。依据这种自由学说，文中主张我们能够对“那个古老而伟大的问题，πόθεν τὸ κακόν，恶的原因和本原是什么?”给出令人满意的回答。关于这一点的论证，我将简要展示，

“我们所称的一切恶，要么是缺陷之恶，例如缺乏其他造物所具有的某些能力或优点；要么是自然之恶，例如痛苦、死亡之类；要么是道德之恶，例如各种恶行。第一种严格说来并非恶；因为任何造物所享有的每一种力量、能力或优点，都是上帝的自由赐予，..... 显然，任何一类造物若缺乏某种从未属于其本性的能力或优点，这对它们来说并非恶，正如它们从未被创造或产生出来，严格说来也不能被称为恶一样。第二种恶，我们称之为自然之恶，要么是前一种恶的必然结果，例如死亡之于一个其本性从未被赋予不死的造物；那么它严格说来并不比前一种更是恶。要么它在整体上被同等或更大的善所抵消，例如好人的苦难与痛苦，那么它严格说来也不是恶；要么最后，它是一种惩罚，那么它就是第三种亦即最后一种恶，即道德之恶的必然结果。而这种恶完全源于对自由的滥用，上帝赋予其造物自由是为了其他目的，并且为了整个造物的完善与秩序，赋予他们自由是合理而适宜的。只是他们违背上帝的意图和命令，滥用了本为整个造物之完善所必需的东西，以致自身败坏堕落。于是，各种恶进入了世界，而造物主与主宰者的无限善性并未因此减损。”--第112页。

上述论证的主要前提可陈述如下：第一，一切被认为的恶要么是缺陷之恶，要么是自然之恶，要么是道德之恶恶。

第二，不完美之恶并非绝对的恶。

第三，自然的恶要么是不完善之恶的结果，要么以更大的善得到补偿，要么是道德之恶的结果。

第四，凡或者是缺陷之恶的结果，或者以更大的善得到补偿者，都不是绝对的恶。

第五。一切绝对的恶都包含在所谓的恶之中。为表达这些前提，让我们假定--

w = 被认为是恶的。

x = 不完美之恶。

y = 自然恶。

z = 道德恶。

p = 不完美之恶的后果。

q = 以更大的善来补偿。

r = 道德恶果的后果。

t = 绝对的恶。

然后，将这些前提视为所有谓词都是特称的原始命题，并将连词要么，要么视为绝对析取的，我们得到以下方程：

$$w = v\{x(1-y)(1-q) + y(1-x)(1-z) + z(1-x)(1-y)\}$$
$$x = v(1-t).$$
$$y = v\{p(1-q)(1-r) + q(1-p)(1-r) + r(1-p)(1-q)\}$$
$$p(l-q) + q(l-p) = v(1-t).$$
$$t = vw\,.$$

由此，如果我们分别消去符号 v，则得到

$$w\{1 - x(1-y)(1-z) - y(1-x)(1-z) - z(1-x)(1-y)\} = 0, \qquad (1)$$
$$xt = 0, \qquad (2)$$
$$y\{1 - p(1-q)(1-r) - q(1-p)(1-r) - r(1-p)(1-q)\} = 0, \qquad (3)$$
$$\{p(1-q) + q(1-p)\}\,t = 0, \qquad (4)$$
$$t(1-w) = 0. \qquad (5)$$

首先，要求找出前提允许我们就绝对的恶、就其依赖于道德之恶以及道德之恶的后果而言，形成什么结论。

为此，我们必须用 z 和 r 来确定 t。

因此必须消去记号 w、x、y、p、q。这个过程很容易，因为任何一组方程都可以通过相加化为一个方程。

从(1)和(5)中消去w，我们得到

$$t\{1 - x(1-y)(1-z) - y(1-x)(1-z) - z(1-x)(1-y)\} = 0. \qquad (6)$$

从(3)和(4)中消去p，得到

$$yqr + yqt + yt(1-r)(1-q) = 0. \tag{7}$$

由此消去q，便得到

$$yt(1-r) = 0. \tag{8}$$

从(2)和(6)中消去x，得到

$$t\{yz + (1-y)(1-z)\} = 0. \tag{9}$$

从(8)和(9)中消去y，得到

$$t(1-z)(1-r) = 0.$$

这是元素t、z和r之间存在的唯一关系。我们因此

$$\begin{aligned} t &= \frac{0}{(1-z)(1-r)} \\ &= \frac{0}{0}zr + \frac{0}{0}z(1-r) + \frac{0}{0}(1-z)r + 0(1-z)(1-r) \\ &= \frac{0}{0}z + \frac{0}{0}(1-z)r; \end{aligned}$$

其解释是，绝对的恶要么是道德上的恶，要么，如果不是道德上的恶，就是道德上的恶的后果。在上述解决过程中获得的任何结果都为我们提供了各种解释。因此，从(8)我们可以推导出

$$\begin{aligned} t = \frac{0}{y(1-r)} = \frac{0}{0}yr + \frac{0}{0}(1-y)r + \frac{0}{0}(1-y)(1-r) \\ = \frac{0}{0}yr + \frac{0}{0}(1-y); \end{aligned}$$

由此，绝对的恶要么是自然之恶，即道德之恶的结果，要么根本不是自然之恶。从给定的方程还可以推出各种其他结论，以回答可以任意提出的问题。我将举出几个这样的例子，而不展示求解的中间过程。问题1--能否从前提中推出任何关系，把以下元素联系起来，即：绝对的恶、缺陷之恶的结果、以更大善补偿的恶?答--不存在任何关系。如果我们消去除z、p、q之外的所有记号，结果就是0 = 0。问题2--绝对的恶、缺陷之恶与缺陷之恶的结果之间是否蕴含任何关系。

答：x、t、p 的最终关系为

$$xt + pt = 0;$$

由此

$$t = \frac{0}{p+x} = \frac{0}{0}(1-p)(1-x).$$

因此，绝对的恶既不是不完美的恶，也不是不完美的恶的结果。问题3。--要求确定自然的恶与不完美的恶以及以更大善补偿的恶之间的关系。

我们发现

$$pqy = 0,$$
$$\therefore y = \frac{0}{pq} = \frac{0}{0}p(1-q) + \frac{0}{0}(1-p).$$

因此，自然的恶要么是未以更大善补偿的不完美的恶的结果，要么它们根本不是不完美的恶的结果。

问题4。--那些不是道德的恶的自然的恶与绝对的恶以及道德的恶的结果处于什么关系？

如果y(1 – z) = s，我们经过消元后发现，

$$ts(1-r) = 0;$$
$$\therefore s = \frac{0}{t(1-r)} = \frac{0}{0}tr + \frac{0}{0}(1-t).$$

因此，不是道德的恶的自然的恶，要么是绝对的恶，即道德的恶的结果，要么它们根本不是绝对的恶。

以下结论是以类似方式推导出来的。每个结论的主词将表明需要描述的是哪些特殊事物，而谓词将表明它旨在包含哪些元素：

-

不是道德的恶的结果的绝对的恶，是道德的恶而非自然的恶。

不是道德的恶的绝对的恶，是自然的恶，即道德的恶的结果。

不是道德的恶的结果的自然的恶，不是绝对的恶。最后，让我们寻求一种用自然的恶和道德的恶来表达的非绝对的恶的描述。

我们得到最终方程：

$$1 - t = yz + \frac{\upsilon}{0}y(1-z) + \frac{\upsilon}{0}(1-y)z + (1-y)(1-z).$$

这个方程的直接解释是一个必然真理，但反向解释则值得注意。既是自然的又是道德的恶，以及既不是自然的也不是道德的恶，不是绝对的恶。

这个结论，尽管可能并未表达一个真理，却无疑蕴含于
所给前提，如形式上所述。
15.让我们从同一论证中取一个更为完整的前提体系，并在那些前提中假定，*either*、*or*并非绝对不相容，以至于在"要么不完美的恶，要么自然的恶，要么道德的恶"这一表达式的含义中，我们包括任何具有这些性质之一或更多的对象。

Let the premises be —

1. All evil (w) is either evil of imperfection (x), or natural evil (y), or moral evil (z).
2. Evil of imperfection (x) is not absolute evil (t).
3. Natural evil (y) is either a consequence of evil of imperfection (p), or it is compensated with greater good (q), or it is a consequence of moral evil (r).
4. Whatever is a consequence of evil of imperfection (p) is not absolute evil (t).
5. Whatever is compensated with greater good (q) is not absolute evil (t).
6. Moral evil (z) is a consequence of the abuse of liberty (u).
7. That which is a consequence of moral evil (r) is a consequence of the abuse of liberty (u).
8. Absolute evils are included in reputed evils.

The premises expressed in the usual way give, after the elimination of the indefinite symbols v, the following equations:

$$w(1-x)(1-y)(1-z) = 0, \tag{1}$$
$$xt = 0, \tag{2}$$
$$y(1-p)(1-q)(1-r) = 0, \tag{3}$$
$$pt = 0, \tag{4}$$
$$qt = 0, \tag{5}$$
$$z(1-u) = 0, \tag{6}$$
$$r(1-u) = 0, \tag{7}$$
$$t(1-w) = 0. \tag{8}$$

这些方程中的每一个都满足条件V(1 – V) = 0。以下结果容易推导出来--

自然的恶要么是绝对的恶，即道德的恶的结果，要么一切恶要么是绝对的恶，即滥用自由的结果，自然的恶要么是不完美的恶，即非绝对的恶，要么绝对的恶要么是自然的恶，即滥用自由的结果，要么它们不是自然的恶，同时也不是不完美的恶。
自由，或者它们并非绝对的恶。

它们根本不是不完善的恶。

滥用自由的结果包括一切是绝对的恶且不是不完美的恶的自然的恶，以及一个不确定的剩余，即非绝对的自然的恶和非自然的恶。

16.这些例子足以说明。读者如果需要，可以很容易地补充其他例子。我们现在来考察斯宾诺莎论证中最本质的部分。

定义。

1.所谓自因*(causa sui)*，我理解为其本质包含存在的东西，或其本性除非作为存在者否则不能被设想的东西。

2.那种在其自身种类中有限或有界的东西*(in suo genere finita)*，被称为可以由同种类的另一事物所限制；例如，物体被称为有限的，因为我们总能设想一个比给定物体更大的另一物体。思想也是如此，受其他思想限制。但物体不受思想限制，思想也不受物体限制。

3.所谓实体，我理解为在自身内*(in se)*并通过自身而被设想*(per se concipitur)*的东西，即其概念不需要借助另一事物的概念来形成的东西。

4.所谓属性，我理解为理智在实体中所感知到的、构成其实质的东西。

5.所谓样式，我理解为实体的分殊，或在他物内并通过该他物而被设想的东西。

6.所谓上帝，我理解为绝对无限的存在者，即由无限属性构成的实体，其中每一属性都表达永恒无限的本质。

解释。--我说绝对无限，而非在其自身种类中无限。因为对于仅在其自身种类中无限的东西，我们可以否认其具有(某些)无限属性。但当一事物是绝对无限时，凡表达本质而不包含否定的，都属于其本质。

7.那种仅由其自身本性的必然性而存在、仅由自身而决定行动的东西，被称为自由的；那种由另一事物以某种确定的方式决定其存在和行动的东西，被称为必然的，或毋宁说被强制的。

8.所谓永恒，我理解为存在本身，就它被设想为必然从永恒之物的唯一定义推出而言。

解释。--因为这样的存在作为永恒真理被设想为事物的本质，因此不能用单纯的绵延或时间来解释，尽管后者应被设想为无始无终。

公理。

1. 一切存在的事物，要么在自身内*in se*，要么在他物内。
2.不能通过他物而被设想的东西，应当通过自身而被设想。

3.从给定的确定原因，结果必然随之产生；反之，如果没有给定确定的原因，结果就不可能随之产生。

4. 关于结果的知识依赖于并包含着关于原因的知识。

5. 没有任何共同之处的事物不能通过彼此而被理解；或者，其一的概念不包含另一的概念。

6. 真观念应当与其自身的对象相符合。(*Idea vera debet cum suo ideato convenire.*)

7.凡能被设想为不存在的东西，其本质都不包含存在。在一些证明中，还隐含了其他定义，并实际上假定了其他公理。例如，在命题I"实体在自然上先于其属性"中，其证明仅诉诸定义3和定义5，似乎假定了以下公理，即："借以设想一物的东西在自然上先于被设想之物。"又如，在命题V的证明中，又假定这条公理的逆命题为真。同类例子还有很多。因此，仅凭逻辑过程，不可能从《伦理学》第一卷前面所列并已在上文给出的公理和定义推出该卷的全部结论。在接下来的简要分析中，我将努力按适当顺序呈现在我看来是真正前提的东西，无论它们是正式陈述的还是隐含的，并说明它们以何种方式蕴含了斯宾诺莎所得出的结论。

17. 那么我认为，在其论证过程中，斯宾诺莎对可能存在的宇宙作出了若干平行的划分，即，

第一，划分为自在之物，x，以及在某个他物之中的事物，x′；由此，由于这些类的事物共同构成了宇宙，我们有

$$x + x' = 1;\ (\text{Ax. I.})$$
$$\text{or, } x = 1 - x'.$$

2nd. Into things which are conceived by themselves, y, and things which are conceived through some other thing,y'; whence

$$y = 1 - y'.\ (\text{Ax. II})$$

3rd. Into substance, z, and modes, z'; whence

$$z = 1 - z'.\ (\text{Def. III. V.})$$

4th. Into things free, f, and things necessary,f'; whence

$$f = 1 - f'.\ (\text{Def. VII.})$$

5th. Into things which are causes and self-existent, e, and things caused by some other thing, e'; whence

$$e = 1 - e'.\ (\text{Def. I. Ax. VII.})$$

而他的推理依据一个明示的或假定的原则进行，即这些划分不仅是平行的，而且是等价的。因此，在界说三中，实体被等同于由自身而被设想的东西；由此

$$z = y.$$

再者，公理四，正如斯宾诺莎实际应用的那样，确立了原因与事物借以被设想的东西的同一性；由此

$$y = e.$$

再者，在界说七中，自由的事物被等同于自存的事物；由此

$$f = e.$$

Lastly, in Def. v mode is made identical with that which is in another thing; whence $z' = x'$, and therefore,

$$z = x.$$

所有这些结果可以汇集为以下一系列方程，即：

$$x = y = z = f = e = 1 - x' = 1 - y' = 1 - f' = 1 - z' = 1 - e'.$$

而这一系列中任意两个以等号连接的项表达一个结论，无论是否为斯宾诺莎所引出，该结论都是其体系的合法推论。因此，方程

$$z = 1 - e',$$

表达其体系的第六个命题，即：一个实体不能由另一个实体产生。类似地，方程

$$z = e,$$

表述了他的第七个命题，即："存在属于实体的本性。"这一演绎链条无须继续追踪。斯宾诺莎主要将它用于按照他的观点对神性诸属性的演绎，此前他已首先力图证明唯一的实体是上帝。在这一过程的步骤中，我认为存在一些谬误，主要取决于词语的歧义使用，这里有必要予以注意。18. 在命题v中，力图表明"不能存在两个或更多具有相同本性或属性的实体"。其证明实际上如下：如果有不止一个实体，它们要么通过属性、要么通过样式来区分；如果通过属性区分，那么具有同一属性的实体只有一个；如果通过样式区分，那么把这些非本质的东西撇开，就不剩下任何实在的区分根据。因此，具有同一属性的实体只有一个。这里所涉及的假定与论著其他部分中的假定不一致。例如，实体，定义iv,

被理智通过属性的手段所领会。根据界说六，它可能具有许多属性。因此，一个实体可以设想地通过其某些属性的差异而与另一个实体相区别，而其他属性则保持不变。

在命题viii中，试图表明：一切实体都必然是无限的。证明如下。只有一个实体，具有一种属性，命题v；而存在属于其本性，命题vii。因此，按其本性，它要么作为有限而存在，要么作为无限而存在。但不是作为有限而存在，因为按照定义ii，它将需要由另一个具有相同本性的实体所限制，而那个实体也应当必然存在，命题vii。因此，将会有两个具有相同属性的实体，这是荒谬的，命题v。所以，实体是无限的。

在这一论证中，“有限的”一词与界说二中的表述“在其自身种类中有限”相混淆。于是便假定，没有任何事物可以是有限的，除非它被另一个同种类的事物所限制。这与该术语的通常含义不一致。斯宾诺莎对有限一词的使用倾向于使空间成为实体的唯一形式，而一切存在的事物不过是空间的情状，而我认为这实际上是他体系的终极基础之一。

应用于上述命题的第一个附释值得注意。我照录原文如下：“Quum finitum esse revera sit ex parte negatio, et infinitum absoluta affirmatio existentiae alicujus naturae, sequitur ergo ex sola Prop.vii.omnem substantiam debere esse infinitam.” 那么这实际上是对克拉克所主张、而被

巴特勒(XIII.11)所反驳的那一原则的断言，即必然存在蕴含着在空间每一部分中的存在。很可能这一原则将被发现是每一次`*a priori*证明一个无限存在者之存在的尝试的基础。

由上述关于实体的普遍属性以及将上帝定义为由无限属性构成的实体，斯宾诺莎关于神性的独特学说必然随之而来。正如实体是自因的、自由的、在其本性中就是原因性的，是其他事物存在于其中、并通过它而被设想的东西；同样的属性也被断言为上帝所具有。他是自因的，命题十一；不可分的，命题十三；唯一的实体，命题十四；万物存在于其中、万物通过它而被设想的存在者，命题十五；自由的，命题十七；万物的内在原因，命题十八。上帝是唯一实体的证明取自定义六，该定义被解释为一项声明：“上帝是绝对无限的存在者，凡表达实体本质的属性都不能被否定于他。”每一个可设想的属性都由此通过定义被归于他，而命题五又确定了不可能存在两个具有同一属性的实体，因此上帝是唯一的实体。

尽管斯宾诺莎的《伦理学》，如同他其他著作的很大一部分一样，以几何学形式呈现，但它并不为本书的符号方法提供一个良好的实践范例。当然，每一推理链条，当其终极前提被真正确定时，都容许用该方法来处理；但在目前的情形下，这种处理除了用字母代替词语之外，与原始论证中所采用的过程几乎没有差别。

如此大量地由对被定义为等价的术语的玩弄所构成的推理并不常见；而我在此用几页篇幅来阐述它们，与其说是由于这些论证的价值--尽管有些人高度推崇它们--不如说是由于该主题本身所引起的兴趣。

19. 我认为，人们在阅读克拉克和斯宾诺莎的论证之后，不可能不深深确信：一切试图完全`*a priori*'地确立一个无限存在者、其属性及其与宇宙的关系的努力，都是徒劳的。所有这类思辨的基本原则，即凡我们能清晰概念到的，必定存在，即使其真理性被承认，也未能达到其目的。因为有限者如何能理解无限者呢?然而，必须承认这种概念的可能性，并且是在比仅仅撤除现象存在的界限更多的意义上，才能为关于无限和永恒之物的`*a priori*'知识确立任何坚实的基础。斯宾诺莎对这种知识的实在性的肯定明白而明确：“Mens humana adaequatum habet cognitionem aeternae et infinitae essentiae Dei”(第二部分，命题四十七)。将此与第二部分命题三十四相比较：“Omnis idea quae in nobis est absoluta sive adaequata et perfecta, vera est;”并与第一部分公理六相比较：“Idea vera debet cum suo ideato convenire.”此外，这种知识被规定为一切其他知识的本质构成要素：“De natura rationis est res sub quadam aeternitatis specie percipere”(第二部分，命题四十四，推论二)。倘若有人说，人类心灵中有一种倾向，在沉思中从特称上升到全称，从有限上升到无限，从短暂上升到永恒；并且这种倾向以很高的概率向我们暗示，存在着比感官所感知或知性所理解更多的东西；这一陈述至少对大多数心灵来说可以被接受为真。然而，有一类思辨，其性质必须部分地参照其他原因来解释--对或然或有局限的知识的不耐烦，而这往往是我们真正所能达到的全部；对绝对确定性的渴望，而给予我们的只有足以在我们面前标出义务之路、却不足以满足思辨理智要求的暗示；也许还有对当前事物景象的不满。由于这些动机的过度主导，类比和或然归纳的更为审慎的程序陷入被忽视。然而，后者无疑是最适合我们当前状况的途径。从周围设计的丰富证据推断一个理智原因的存在，从对我们自身本性的构造和道德规定的考察上升到世界道德治理者的概念--这些虽然只是一个在其能力和知识材料上受限的知性的微弱步伐，却比在自然宗教的立场上企图达到不可企及的确定性的雄心勃勃的尝试更有用。并且，正如这些是最古老的，它们也仍然是(启示除外)关于这个世界进程并非被抛弃给偶然和无情的命运的信念的最坚实的基础。

第十四章

用化归为单一等价方程的方法分析方程组的示例 V = 0 **，其中满足条件** V(1 – V) = 0 **。**

1. 让我们采用前一章中用来证明“物质不是必然存在者”的那套著名前提，并删去第6个前提，即运动存在，--考察从其余前提中得出的某些结论。这实际上是接受克拉克博士的假设原则为真；但设想我们不知道运动存在这一事实。可能会出现这样的情况：这样选取一个论证的部分前提可能导致有趣的结论，尽管重新审视当前这个例子的用意另有其他。实际采用的前提将是--

1. 如果物质是一个必然存在者，那么引力属性要么必然存在，要么必然不存在。

2. 如果引力必然不存在，并且世界不受任何主宰理智的支配，那么运动不存在。

3. 如果引力必然存在，那么真空就是必要的。
4. 如果真空是必要的，那么物质就不是一个必然的存在者。
5. 如果物质是一个必然存在者，那么世界不受主宰理智的支配。

如果像之前一样，我们用以下记号表示这些基本命题，即：

x = 物质是必然存在者。

引力必然存在。

w = 运动存在。

引力必然不存在。

z = 世界仅仅是物质的，且不受主宰理智的支配。v = 真空是必然的。

我们将对前提进行表达，并消去不定类记号(q)，得到如下方程组：

$$\begin{aligned} xyt + x\bar{y}\bar{t} &= 0, \\ tzw &= 0, \\ y\bar{v} &= 0, \\ vx &= 0, \\ x\bar{z} &= 0; \end{aligned}$$

其中为简洁起见， y 代表 1 – y, ¯t 代表 1 – t，依此类推；由此也可得 1 – t = t,1 – ¯y = y，等等。

由于这些方程的第一项只涉及正项，我们可以将它们相加构成一个单一方程(VIII.命题2)，即：

$$xyt + x\bar{y}\bar{t} + y\bar{v} + vx + x\bar{z} + tzw = 0,$$

剩下的就是化简第一项，使其满足条件 V(1 – V)= 0。

为此，我们首先获得它关于记号 x 和 y 的展开式。结果为--

$$\begin{aligned} (t + \bar{v} + v + \bar{z} + tzw)xy + (\bar{t} + v + \bar{z} + tzw)x\bar{y} \\ +(\bar{v} + tzw)\bar{x}y + tzw\bar{x}\bar{y} = 0. \end{aligned}$$

我们的目标将通过把展开式的四个系数化为等价的、自身满足所需条件的形式来实现。

现在第一个系数是，因为 v + ¯v = 1,

$$1 + t + \bar{z} + tzw,$$

这归结为统一(IX.命题1)。

第二个系数是

$$\bar{t} + v + \bar{z} + tzw;$$

及其约化形式(X.3)为

$$\bar{t} + tv + t\bar{v}\bar{z} + t\bar{v}zw.$$

第三个系数 v + tzw 用同样的方法化为 v + tzwv；最后一个系数 tzw 无需化简。因此展开式变为

$$xy + (\bar{t} + tv + t\bar{v}\bar{z} + t\bar{v}zw)\, x\bar{y} + (\bar{v} + tzwv)\, \bar{x}y + tzw\bar{x}\bar{y} = 0; \qquad (1)$$

而这正是所要寻求的化简形式。

2. 现在，根据第x章命题iii.中所断言的原理，上述方程中任何特定一组记号之间的整个关系，可以通过关于该特定记号展开该方程来推出，

并在结果中只保留系数为1的那些成分。因此，如果 x 和 y 是所选的记号，我们便立即得到方程

$$xy = 0,$$

由此我们得到

$$y = \frac{\breve{}}{0}(1 - x),$$

with the interpretation, *If gravitation is necessarily present, matter is not a necessary being.*

Let us next seek the relation between x and w. Developing (1) with respect to those symbols, we get

$$(y + \bar{t}\bar{y} + tv\bar{y} + t\bar{v}\bar{z}\bar{y} + t\bar{v}z\bar{y})\, xw + (y + \bar{t}\bar{y} + tv\bar{y} + t\bar{v}\bar{z}\bar{y})\, x\bar{w} + (\bar{v}y + tzvy + tz\bar{y})\, \bar{x}w + \bar{v}yx\bar{w} = 0.$$

The coefficient of xw, and it alone, reduces to unity. For $t\bar{v}\bar{z}\bar{y} + t\bar{v}z\bar{y} = t\bar{v}\bar{y}$, and $tv\bar{y} + t\bar{v}\bar{y} = t\bar{y}$, and $\bar{t}\bar{y} + t\bar{y} = \bar{y}$, and lastly, $y + \bar{y} = 1$. This is always the mode in which such reductions take place. Hence we get

$$xw = 0,$$
$$\therefore w = \frac{0}{0}(1 - x),$$

其解释为，如果运动存在，则物质不是必然存在者。

如果以同样的方式，我们关于 x 和 z 展开(1)，便得到方程

$$x\bar{z} = 0,$$
$$\therefore x = \frac{0}{0}z,$$

其解释为，如果物质是必然存在者，则世界仅是物质的，且没有主宰的智慧。

这实际上只是第五个前提的再现，但它表明，在它所涉及的两个元素之间不存在其他关系。

如果我们寻求连接元素 x、w 和 y 的整个关系，我们关于这些记号展开(1)并如前所述进行，便发现

$$xy + xw\bar{y} = 0.$$

假设要求由此确定假说“运动不存在”相对于物质必然性和引力必然存在这两个问题的推论。我们发现

$$w = \frac{-xy}{x\bar{y}},$$
$$\therefore 1 - w = \frac{x}{x\bar{y}} = \frac{1}{0}xy + x\bar{y} + \frac{0}{0}\bar{x};$$
$$\text{or, } 1 - w = x\bar{y} + \frac{0}{0}\bar{x}, \text{ with } xy = 0.$$

第一个方程的直接解释是，如果运动不存在，则要么物质是必然存在者且引力不必然存在，要么物质不是必然存在者。

The reverse interpretation is, *If matter is a necessary being, and gravitation not necessary, motion does not exist.*

In exactly the same mode, if we sought the full relation between x, z, and w, we should find

$$xzw + x\bar{z} = 0.$$

由此我们可以推出

$$z = x\bar{w} + \frac{0}{0}\bar{x}, \text{ with } xw = 0.$$

因此，如果世界仅是物质的，且不受任何主宰智慧支配，则要么物质是必然存在者且运动不存在，要么物质不是必然存在者。

同样，反过来，如果物质是必然存在者，且不存在运动这种东西，则世界仅是物质的。

3. 我们当然可以将同样的方法推广到确定任何复杂假说 u 的推论，例如“世界仅仅是物质的，并且没有任何主宰的智慧(z)，但运动存在”(w)，并参照原前提中涉及的任何其他怀疑或推测的元素，例如“物质是必然的存在者”(x)、“引力是物质的一种必然性质”(y)。为此，我们应当将一个新方程与一般方程(1)联系起来，

$$u = wz,$$

将如此形成的系统归结为一个单一方程 V = 0，其中 V 满足条件 V(1 – V) = 0，并如上所述去确定 u、x 和 y 之间的关系，最后将 u 作为 x 和 y 的展开函数。但采用第八章和第九章的方法要好得多。我在此仅指出若干结果及其演绎的主要步骤，而将其验证留给读者自行选择。

In the problem last mentioned we find, as the relation connecting x, y, w, and z,

$$xw + x\bar{w}y + x\bar{w}\bar{y}\bar{z} = 0.$$

And if we write $u = xy$, and then eliminate the symbols x and y by the general problem, Chap. IX., we find

$$xu + xy\bar{u} = 0,$$

whence

$$u = \frac{1}{0}xy + 0x\bar{y} + \frac{0}{0}\bar{x};$$

wherefore

$$wz = \frac{0}{0}\bar{x} \text{ with } xy = 0.$$

因此，如果世界仅是物质的，且没有主宰的智慧，同时运动存在，则物质不是必然存在者。

前面已经表明，如果运动存在，物质就不是必然的存在者，因此上述结论告诉我们的甚至少于我们此前已(从推论上)确定为真的东西。然而，该结论是对所提问题的恰当而完整的回答，该问题仅仅是确定某一复杂假说的推论。4. 因此，即使从我们面前有限的 premise 系统出发，也很容易演绎出大量额外的推论，在给定的条件中涉及基本命题的任何被提出的组合。如果该条件与前提不一致，这一事实将由解的形式表明。该方法将赋予表达所提条件的记号组合的值将为 0。另一方面，如果所讨论条件的满足对所寻求关系的那些命题不施加任何限制，以致这些命题的每一种组合都同等可能，--这一事实也将由解的形式表明。下面附上每种情况的例子。

如果我们以通常的方式寻求由物质是必然存在者且同时运动存在这一条件所产生的推论，就其对命题世界仅是物质的，且没有主宰的智慧以及引力必然存在的影响而言，我们将得到方程

$$xw = 0,$$

这表明所提出的条件与前提不一致，因此无法满足。

如果我们寻求由物质不是必然存在者且同时运动确实存在这一条件所产生的推论，就上述同样的元素而言，即没有主宰的智慧和引力的必然性,--我们得到如下结果，

$$(1-x)w = \frac{0}{0}yz + \frac{0}{0}y(1-z) + \frac{0}{0}(1-y)z + \frac{0}{0}(1-y)(1-z),$$

这可以字面解释如下：

如果物质不是必然的存在者，并且运动存在，那么要么世界仅仅是物质的且没有主宰的智慧，并且引力是必然的，要么这两个结果之一成立而另一个不成立，要么两者都不为真。因此，在四种可能的组合中--其中某一种必然为真，且必然只有一种能为真--据称任何一种都可能为真。这样的结果是一种自明之理--一种纯粹必然的真理。然而它包含着对所提问题所能给出的唯一回答。

我认为没有必要为这些应用辩护以反驳劳而无功的琐碎之讥。为了确立对一般原理和方法的信心，或许有必要较为充分地进入本身无用的细节。当这一目的在本探究的主题中

得以实现时，让一切曾有助于其实现、但后来被发现为多余的东西被遗忘吧。

第十五章

亚里士多德逻辑及其现代扩展，以本论著的方法加以考察。

1. 亚里士多德的逻辑体系，其细节虽有修改，但本质特征未变，在学院教育中占据如此重要的地位，以至于在本著作中似乎有必要对其性质作一些说明，并对其所呈现的主要问题作一些简要讨论。我确信，我着手这项任务时并无狭隘或苛刻批评的精神。的确，我的目的不是要在由来已久的经院体系与本论著的体系之间作任何直接比较；而是将真理置于一切其他考虑之上，努力展示古代学说的真正性质，并消除一两个关于其范围与充分性的流行误解。

在亚里士多德逻辑学以及所有同类逻辑体系的精髓与程序中被视为本质性的东西，是对可允许的推论形式进行分类的尝试，以及将这些形式(无论是集合地还是个别地)明确地关联到某种公理性质的一般原则，例如“亚里士多德的箴言”：凡对属有所肯定或否定的，也可以在同一意义上对包含在该属下的任何种有所肯定或否定。关于这类一般原则，我认为可以观察到，它们要么直接地、但以抽象的形式陈述了它们被认为要阐明的论证，并在这样陈述该论证时肯定了其有效性；要么在其表达中包含了专业术语，这些术语在定义之后又将我们引向同一点，即对所设想的可允许的推论形式的抽象陈述。因此，分类的观念是那些体系中一个普遍渗透的元素。此外，它们将逻辑学展示为可分解为两大分支，其中一个分支致力于处理直言命题，另一个分支致力于处理假言或条件命题。这一区分与本书中关于第一性命题和第二性命题的区分几乎相同。在所有普通的逻辑学论著中，关于直言命题理论的讨论远比关于假言命题的讨论更为充分和精细，并且部分地涉及古代经院式的区分，部分地涉及演绎推论的准则。只有对后一种应用才是

此处有必要提请注意。

2. 直言命题分为以下四类，即：

		TYPE
第一。 全称肯定命题：		All Y's are X's.
第二。 全称否定	?	No Y's are X's.
第三。 特称肯定	?	Some Y's are X's.
第4。 特称否定	?	Some Y's are not X's.

最近又增添了四种形式，从而总共构成八种形式(见下一篇文章)，然而这些形式可以归约为六种，并且受制于一些关系，这些关系已由德摩根教授在其《形式逻辑》中作了极为充分和出色的讨论。W.汉密尔顿爵士向世人提出了一个与上述略有不同的方案，并使之成为三段论推论方法的基础，该方法受到逻辑学领域权威们的高度推崇。[1]

形式逻辑相对于上述命题系统的过程被描述为两种，即“换位”和“三段论”。所谓换位，是指以上述种类的任何命题用一个等价的形式来表达，但项的顺序相反。所谓三段论，是指从两个具有共同项(无论是主词还是谓词)的此类命题中，推出某种在推论上蕴含于这两个命题之中的第三命题，并形成“结论”。大多数逻辑学作者主张，这些过程--并且根据某些人的观点，单一的三段论过程--提供了推理的普遍类型，而心灵在任何论证序列中的职责，就是使自身--无论有意识还是无意识地--符合逻辑学家著作中所分类的那些过程的特定模型。

3. 我所打算采取的路线是表明，三段论和换位这些过程如何能够按照本论著的原理以最一般的方式进行，并且，如此从与一个逻辑体系的关系来看待它们--该体系的基础被认为已奠定于思维的终极规律之中--以寻求确定它们的真正位置和本质特征。

八种基本命题类型在语言中的表达式
符号的规则如下：

$$
\begin{array}{lll}
1. & \text{All } Y\text{'s are } X\text{'s}, & y = vx. \\
2. & \text{No } Y\text{'s are } X\text{'s}, & y = v(1-x). \\
3. & \text{Some } Y\text{'s are } X\text{'s}, & vy = vx. \\
4. & \text{Some } Y\text{'s are not-}X\text{'s}, & vy = v(1-x). \\
5. & \text{All not-}Y\text{'s are } X\text{'s}, & 1-y = vx. \\
6. & \text{No not-}Y\text{'s are } X\text{'s}, & 1-y = v(l-x). \\
7. & \text{Some not-}Y\text{'s are } X\text{'s}, & v(l-y) = vx. \\
8. & \text{Some not-}Y\text{'s are not-}X\text{'s}, & v(1-y) = v(1-x).
\end{array}
\qquad (1)
$$

[1] Thomson's Outlines of the Laws of Thought, p. 177.

在指称这些形式时，将逻辑的量--“全称”和“特称”--以及质--“肯定”和“否定”--这些称谓，在稍后将解释的意义上，应用于命题的项而非命题本身，将是方便的。因此我们将把“所有 Y ”这一项视为全称肯定；把“ Y ”或“有些 Y ”这一项视为特称肯定；把“所有非 Y ”这一项视为全称否定；把“有些非 Y ”这一项视为特称否定。“没有 Y ”这一表达式严格说来不是命题的项，因为命题“没有 Y 是 X ”的真正含义是“所有 Y 都不是 X ”。因此，该命题的主词是全称肯定的，谓词是特称否定的。“人”与“非人”这两个概念之间存在真实的区别，这是显而易见的。当我如上所述应用肯定和否定的称谓时，我所考虑的正是这一区别，然而并不坚持这种应用在词源上的恰当性。肯定的和privative的(剥夺的)这两个称谓本会更合适，但前者已在本著作的其他部分以固定的意义使用。

4. 从上面给出的符号形式，换位的规律立即随之而来。因此从方程

$$y = vx,$$

它表示命题“所有 Y 都是 X”，我们消去 v 后推出，

$$y(1-x) = 0,$$

其解参照 1 – x 给出，

$$1 - x = \frac{\upsilon}{0}(1-y);$$

其解释为，

所有非- X 都不是非- Y。

This is an example of what is called “negative conversion.” In like manner, the equation

$$y = v(1-x),$$

representing the proposition, “No Y’s are X’s,” gives

$$x = \frac{0}{0}(1-y),$$

其解释是，“没有 X 是 Y”。这是所谓简单换位的一个例子；尽管它实际上与前一个例子中所展示的换位属于同一种类。逻辑学家所注意到的所有换位例子，要么属于上述种类，要么属于仅仅调换命题各项而不改变其性质的那种，例如当我们把

$$vy = vx, \text{ representing, Some } Y\text{’s are } X\text{’s,}$$

变为

$$vx = vy, \text{ representing, Some } X\text{'s are } Y\text{'s;}$$

或者它们涉及那些过程与某种辅助的限制过程的结合，正如当从方程

$$y = vx, \text{ representing, All } Y\text{'s are } X\text{'s,}$$

我们通过乘以v来推导，

$$vy = vx, \text{ representing, Some } Y\text{'s are } X\text{'s,}$$

因此

$$vx = vy, \text{ representing, Some } X\text{'s are } Y\text{'s.}$$

在这个例子中，限制的过程先于换位的过程。

从这些实例可以看出，换位是逻辑学中一个更为普遍的过程的特殊应用，本著作中已给出了该过程的许多例子。该过程的目标是将任何命题中的任何元素--无论多么复杂--确定为其余元素的逻辑函数。我们不必将注意力局限于被视为简单项的主词和谓词，而是可以取进入其中任一者的任何元素或元素的任何组合；使该元素或该组合成为新命题的"主词"；并根据提供给我们的数据确定其谓词应当是什么。可以指出，即使上面所列举的命题的简单形式，也为这样一种方法的应用提供了一定的依据，超出了公认的换位规律似乎所承认的范围。因此，方程

$$y = vx, \text{ representing, All } Y\text{'s are } X\text{'s,}$$

除前面已推出的命题外，还给我们以下三个命题：

第一。 $y(1-x) = 0.$ 没有不是 X 的 Y。

第二，1 – y = 0 0 x+(1–x). 不是-Y 的事物包括所有不是-X 的事物，以及是 X 的事物的一种不确定的剩余。

第三。 $x = y + \frac{0}{0}(1-y).$ 属于 x 的事物包括所有事物是 Y 的事物，以及不是-Y 的事物的一种不确定的剩余。

诚然，这些结论仅仅把给定的命题置入其他等价的 form 中，--但被接受的“否定换质”方式的职责不过如此，别无其他。

此外，这些换质过程并非初级的，而是比它们更为简单的过程的组合，这些过程更直接地依赖于支配推理的符号工具之使用的那些终极规律和公理。这一评论同样适用于三段论的情形，我们接下来就考虑它。

5. 三段论的本性在具体实例中看得最清楚。假设我们有这些命题，

$$\text{All } X\text{'s are } Y\text{'s},$$
$$\text{All } Y\text{'s are } Z\text{'s}.$$

由这些我们可以推出结论，

$$\text{All } X\text{'s are } Z\text{'s}.$$

这是一个三段论推论。项X和Z称为端项，Y称为中项。现在可以一般地定义三段论的功能。给定两个命题，其种类已在(1)中列表，并涉及一个中项或共同项Y，它在一个命题中与一个端项X相连，在另一个命题中与一个端项Z相连；要求给出连接端项X和Z的关系。项Y可以以其肯定形式出现，如“所有Y”,“有些Y”；或以其否定形式出现，如“所有非Y”,“有些非Y”；在任一命题中，而不考虑它在另一命题中所采取的特殊形式。

在具体实例中，用本论著的方法来分解三段论，没有比这更容易的了。它的分解实际上是把命题系统化归的过程的一种具体应用。取上面给出的例子，我们有，

$$x = vy,$$
$$y = v'z;$$

由此通过代换，

$$x = vv'z,$$

它被解释为

$$\text{All } X\text{'s are } Z\text{'s}.$$

Or, proceeding rigorously in accordance with the method developed in (VIII.7), we deduce

$$x(1-y) = 0, \qquad y(1-z) = 0.$$

Adding these equations, and eliminating y, we have

$$x(1-z) = 0;$$

由此 x = 00z,或者，所有X的都是Z的。
而任何其他情形也可依同样方式处理。
6. 然而，放下对特殊例子的考虑，让我们来考察一切三段论都可化归到的一般形式。

命题一。
推导三段论的一般规则。

我在这里所谓三段论的一般规则，是指适用于其主词和谓词在量与质两方面都容许各种变化的前提的规则，但同一命题中两个全称项的结合除外。因此，可容许的命题形式就是(1)中给出表格视图的那些形式。

设X和Y为进入第一个前提的元素或事物，Z和Y为第二个前提所涉及的。于是会出现两种性质根本不同的情况。涉及Y的项将要么具有相同的性质，要么具有不同的性质，当它们都谈论“Y”或都谈论“非Y”时，这些项被视为具有相同性质；当其中一个谈论“Y”而另一个谈论“非Y”时，则被视为具有不同性质。任何一对满足前一种条件的前提，都可以用方程

$$vx = v'y, \tag{1}$$
$$wz = w'y; \tag{2}$$

来表示，因为我们可以用记号y来表示“所有Y”或“所有非Y”，因为该记号的解释纯粹是约定的。如果我们用y表示“所有非Y”，那么1–y将表示“所有Y”，并且不会引入其他变化。对于记号x和z也允许同样的自由，因此通过适当指定x、y和z的解释，方程(1)和(2)可以表示依赖于各项性质的前提组合的所有变体。再者，通过在这些方程中赋予记号v、v′、w、w′以适当的解释，所有关于量的变体也可以被表示。因此，如果我们取v=1，并用v′表示一个不确定的类，那么方程(1)将按照该词的通常意义表示一个全称命题，即一个具有全称主词和特称谓词的命题。事实上，我们可以赋予任一前提中的主词和谓词以我们想要的任何量(在此使用该词的经院哲学意义)，除了根据假设它们不能同时为全称。因此，系统(1)、(2)完全一般地表示了具有相同中项的前提的可能组合。

7.为了使我们的分析像它所应用的方程一样一般，让我们用本工作的方法从(1)和(2)中消去y，并寻求x、1–x和vx用z以及记号v、v′、w、w′表示的表达式。上述内容将包括结论主词的所有可能形式。形式v(1–x)被排除，因为我们不能从

解释 vx = 前提中给出的某些 X 的事物，把 v(1 – x) 解释为某些不是-X 的事物。记号 v 当在“某些”的意义上使用时，只适用于它在前提中与之相连接的那个项。分析的结果如下：

$$x = \big[vv'ww' + \frac{0}{0}\{vv'(1-w)(1-w') + ww'(1-v)(1-v') + (1-v)(1-w)\}\big]z + \frac{0}{0}\{vv'(1-w') + 1 - v\}(1-z), \quad \text{(I.)}$$

$$1 - x = \big[v(1-v')\{ww' + (1-w)(1-w')\} + v(1-w)w' + \frac{0}{0}\{vv'(1-w)(1-w') + ww'(1-v)(1-v') + (1-v)(1-w)\}\big]z + \big[v(1-w)w' + \frac{0}{0}\{vv'(1-w') + 1 - v\}\big](1-z), \quad \text{(II.)}$$

$$vx = \{vv'ww' + \frac{0}{0}vv'(1-w)(1-w')\}z + \frac{0}{0}(1-w')(1-z). \quad \text{(III.)}$$

这些表达式中每一个都在其第二成员中涉及两个项，其中之一以 z 为因子，另一以 1 – z 为因子。但三段论推论在形式上并不容许其结论中出现对立类，如 Z 的事物与不是-Z 的事物并存。

因此，为了确定那种推论方式的规则，我们必须查明：在什么条件下，我们任一方程的第二成员可化归为单一项。

The simplest form is (III.), and it is reducible to a single term if $w' = 1$. The equation then becomes

$$vx = vv'wz, \tag{3}$$

第一成员与第一前提中的端项相同；第二成员在量与质上都与第二前提中的端项相同。因为既然 w′ = 1，则(2)的第二成员，由于含有中词 y，是全称的；因此，按假说，第一成员是特称的，所以(3)的第二成员，由于在其系数中含有同一记号 w，也是特称的。由此我们推出以下规律。

推论的条件。--至少有一个中词是全称的。推论的规则。--使两端项相等。

从对方程(I.)和(II.)的分析中还将进一步看出，当中间项具有相同性质时，上述是三段论推论的唯一条件。因此，如果w′=1且v=1,(I.)的第二项就化为单项；如果w′=1、v=1、w=1,(II.)的第二项就化为单项。在每一种情况下，都必须有w′=1，即前面所指定的唯一充分条件。

其次，考虑中词性质不同的情形。这时前提可表示为以下形式

$$vx = v'y, \tag{4}$$
$$wz = w'(l-y); \tag{5}$$

并且，如果像以前一样消去 y，并确定 x、1 – x 和 vx 的表达式，我们得到

$$\begin{aligned} x = \big[vv'(l-w)w' + \frac{0}{0}\{ww'(1-v) + (1-v)(1-v')(1-w) \\ + v'(1-w)(1-w')\}\big] \\ + \big[vv'w' + \frac{0}{0}\{(1-v)(1-v') + v'(l-w')\}\big](1-z). \end{aligned} \tag{IV.}$$

$$\begin{aligned} 1-x = \big[ww'v + v(1-v')(1-w) + \frac{0}{0}\{ww'(1-v) \\ + (1-v)(1-v')(1-w) + v'(1-w)(1-w')\}\big]z \\ + \big[v(1-v') + \frac{0}{0}\{v'(1-w') + (1-v)(1-v')\}\big](1-z). \end{aligned} \tag{V.}$$

$$\begin{aligned} vx = \{vv'(1-w)w' + \frac{0}{0}vv'(1-w)(1-w')\}z \\ + \{vv'w' + \frac{0}{0}vv'(1-w')\}(1-z). \end{aligned} \tag{VI.}$$

现在，(VI.) 的第二成员相对于 z 化归为单一项，如果 w = 1，则给出

$$vx = \{vv'w' + \frac{0}{0}vv'(1-w')\}(1-z);$$

其第二成员在量与质两方面都与第二前提中相应的端项 wz 相反。因为既然 w = 1,wz 是全称的。但因子 vv′表明它所附着的项是特称的，因为按假说 v 和 v′并非都等于 1。由此我们在中词相同的情形下推出以下推论规律：

First Condition of Inference.—*At least one universal extreme.*

Rule of Inference.—*Change the quantity and quality of that extreme, and equate the result to the other extreme.*

Moreover, the second member of (V.) reduces to a single term if $v' = 1$, $w' = 1$; it then gives

$$1 - x = \{vw + \frac{0}{0}(1-v)w\}z.$$

现在既然 v′ = 1,w′ = 1，前提的中词都是全称的，因此端项 vx、wz 是特称的。但在结论中，端项

含有 x 的那个在量与质两方面都与第一前提中的端项 vx 相反，而含有 z 的那个端项在量与质两方面都与第二前提中相应的端项 wz 一致。由此得出以下一般规律：

推理的第二个条件。- 两个全称中项。
推论的规则。--改变任一端项的量与质，并使结果与另一未变的端项相等。

在中词不同的情形下，除上述之外没有其他三段论推论的条件或规则。因此，方程(IV.) 虽然在 w = 1 且 v = 1 时可化归为三段论结论的形式，却并不由此确立一个新的推论条件；因为根据前面所述，单是条件 v = 1，或 w = 1，就已足够。

8. 以下例子将充分说明上面给出的一般三段论规则：

1. All Y's are X's.
All Z's are Y's.

这属于情形 1。所有 Y 的事物是全称中词。使端项相等便给出结论

All Z's are X's;

全称项“所有 Z 的事物”成为主词；特称项“(某些) X 的事物”成为谓词。

2. All X's are Y's.
No Z's are Y's.

这些前提的恰当表达是

All X's are Y's.
所有Z都不是Y。

它们属于情形 2，并满足推论的第一条件。第一前提中的中词 Y 的事物是特称肯定的；第二前提中的中词不是-Y 的事物是特称否定的。如果我们取“所有 Z 的事物”作为全称端项，并按规则改变其量与质，我们得到项“某些不是-Z 的事物”，再使之与另一端项“所有 X 的事物”相等，便给出，

所有X都不是Z，即没有X是Z。

如果我们从另一个全称端项开始，并同样进行，我们便得到等价的结果，

No Z's are X's.

3. All Y's are X's.

所有非Y都是Z。

这里中项在性质上也不相同。因此前提属于情形2，并且由于有两个全称中项，推论的第二条件得到满足。如果我们按规则改变第一个端项的量与性质，(某些) X 的，我们得到所有非- X 的，将其与另一个端项等同，得到

所有非- X 的都是 Z 的。

若将程序倒序进行，也会得到等价的结果，

所有非- Z 的都是 X。

最后两个例子的结论在经院逻辑学体系中不会被认作有效，因为该体系实际上要求命题的主词应当是肯定的。然而，这些结论本身是完全正当的，而据以确定它们的规则无疑构成了三段论推论最普遍的准则。用以推导出这些结论的探究过程或许会显得不必要地复杂；而且可以肯定，它们本可以更容易地获得，无需任何符号工具的帮助。然而，我的目标是以最普遍的方式进行探究，并通过一种彻底穷尽的分析。鉴于这一目的，所采用方法的简洁或冗长是无关紧要的。事实上，这一分析并非恰当意义上的三段论分析，而是远为普遍的命题组合的分析；因为我们被允许对记号 v、v′、w、w′赋予我们任意选择的类解释。为说明这一评述，我将把解(I.)应用于以下虚构的情形：

假设若干块带有不同颜色条纹的布被提交检验，并且对它们作出了以下两个观察：

第一，凡带有白色和绿色条纹的，也都带有黑色和黄色条纹，反之亦然。

第二，每一块带有红色和橙色条纹的布片，也都带有蓝色和黄色条纹，反之亦然。假设接下来需要确定带有绿色标记的布片相对于白色、黑色、红色、橙色和蓝色这些颜色处于何种关系。

这里如果我们假定 v = 白色，x = 绿色，v′ = 黑色，y = 黄色，w = 红色，z = 橙色，w′ = 蓝色，我们前提的表达式将是

$$vx = v'y,$$
$$wz = w'y,$$

与系统(1)(2)一致。方程(I.) 然后导致以下结论：

带有绿色条纹的棋子，或者同时带有橙色、白色、黑色、红色和蓝色条纹，凡具有该性质的一切棋子都包含在带有绿色条纹的棋子之中；或者它们带有橙色、白色和黑色条纹，但不带红色或蓝色条纹；或者它们带有橙色、红色和蓝色条纹，但不带白色或黑色条纹；或者它们带有橙色条纹，但不带白色或红色条纹；或者它们带有白色和黑色条纹，但不带蓝色或橙色条纹；或者它们既不带白色条纹也不带橙色条纹。

考虑到这个结论的性质，无论是传达它的符号表达式(I.)，还是推导出该表达式的分析，都不能被认为是多余的复杂。

9. 本章呈现三段论学说的形式，为一项重要的观察提供了依据。我们已经看到，在其两大划分的每一部分中，整个讨论至少就规则和方法的确定而言，都可归结为一对方程的分析，即当诸前提具有相同的中项时为系统(1)、(2)的分析，而当诸中项不同时为系统(4)、(5)的分析。此外，这一分析实际上是通过一种方法进行的，该方法建立在某些直接由语言的构造推演而出的一般规律之上(第ii章)，经对人类心灵活动的研究所确认(第iii章)，并被证明适用于分析一切方程系统--凡命题或命题的组合得以由之表示者(第viii章)。于是，我们在此拥有了明确解决这一问题的手段：三段论是否确实是推理的基本类型--对其规律的研究是否与演绎逻辑的研究外延相同。因为倘若如此，这一事实的某种迹象必定会在我们所从事分析的那些方程系统中显示出来。不可设想三段论竟是推理的唯一本质过程，而该过程的表现却丝毫不显示这种卓越的至高性质。然而，没有任何迹象表明，讨论一切表达命题的方程系统都包含于本章所考察的特定系统的讨论之中。然而逻辑学著作家们几乎一致地断言三段论推论在演绎推理中不仅具有至高地位，而且具有普遍充分性。沃特利大主教的言辞总是清晰而明确，在逻辑学问题上尤应予以特别注意，在这一点上说得非常肯定。“因为逻辑学，”他说，“可以说就是推理的语法，它提出规范的三段论，并非作为一种独特的论证方式，旨在取代任何其他方式；而是作为一切正确推理最终都可归结于其下的形式。”[2]而穆勒先生在其《逻辑体系》中题为“论推理或三段论”的一章里，列举了三段论的通常形式之后评论道：“一切有效的推理，一切由先前承认的一般命题推出其他同等或较少一般性的命题的推理，都可以在上述某些形式中展示出来。”又说：“因此，我们不妨遵照逻辑学家们的一般意见，把第一格的两种基本形式

2《逻辑学原理》，第13页，第九版。

被视为一切正确推理的普遍形式。”根据这些观点，有人主张逻辑科学享有免于所有其他科学所服从的不完善与进步条件的特权；[3]而其起源于古代一位伟大心智的艰辛劳作，则通过一个颇为大胆的比喻，被比作帕拉斯的 mythological 诞生。

既然三段论是消元的一种，那么摆在我们面前的问题显然归结为以下两个：第一，是否一切消元都可还原为三段论；第二，演绎推理是否可以恰当地被视为仅仅由消元构成。我相信，经过仔细考察，对前一个问题的真正答案是：在理论上总是可能如此分解和组合命题，使得消元随后能够按照三段论的准则来实现，但在许多情况下，这种还原过程将是勉强的、不自然的，并且会涉及并非三段论的操作。对第二个问题，我的回答是：除非任意限制推理一词的含义，否则推理不能被局限于消元过程。任何定义，若使它小于那些建立在思维规律之上、作用于命题的方法之总和，便不能成立；而在这些方法之中，消元过程尽管极为重要，却只占一席之地。

关于三段论的性质及其职司范围，流行着许多错误--我不得不如此看待--其中大部分似乎源于一种倾向：把逻辑中所有具有简单性和直觉确定性特征的真理都视为基本真理，而不探究它们与科学中其他真理、或与推理技艺中一般方法的关系。亚里士多德的*dictum de omni et nullo*是一条自明原则，但它并不属于那些终极的推理能力规律--所有其他规律，无论多么明白自明，都可追溯到这些规律，并可按照最严格的科学演进次序从它们演绎出来。因为，尽管每一门科学的基本真理通常最易于领会，然而这种简单性并不是判断它们是否有资格被视为基本真理的标准。这一标准必须从它们所能支撑的结构之性质与范围中去寻找。持此观点，莱布尼茨在我看来判断正确，当他将“矛盾原则”赋予逻辑中的基本地位时；[4]因为我们已经看到那条思维规律的种种后果，而矛盾原则正是它的公理式表达(III.15)。但关于演绎推论的性质及其构成元素，已经说得够多了。归纳这一主题或许将在本书另一部分受到一些关注。

10. 本章已指出，对假言命题的通常处理远比对直言命题的处理更为不完善。通常所谓的假言三段论，实际上似乎根本不是三段论。

设论证--

3 康德《逻辑学》导论

4 《人类理解新论》。第iv卷，第2章。《神正论》第一部分，第44节。

If A is B, C is D,
But A is B,
Therefore C is D,

be put in the form—

If the proposition X is true, Y is true,
But X is true,
Therefore Y is true;

其中 X 表示命题 A 是 B，而 Y 表示命题 C 是 D。于是可以看出，前提只包含两个词项或元素，而三段论本质上涉及三个。下面将是一个真正的假言三段论：

If X is true, Y is true;
If Y is true, Z is true;
$\therefore$ If X is true, Z is true.

在本书前一部分讨论了次等命题之后，显而易见，假言三段论的形式在各方面都必定与直言三段论的形式精确对应。特称命题，例如“有时若X为真，则Y为真”，可以被引入，而本章为直言三段论所推得的推论条件和规则，可以毫无减损地被解释以适用于假言三段论中的相应情形。

11. 那么，关于经院逻辑的性质与范围，我们最终得出什么结论呢?我认为如下：它不是一门科学，而是一些科学真理的汇集，过于不完整，不足以自身构成一个体系，也不够基本，不足以充当一个完美体系得以立足的基础。然而，并不能因此就说，既然经院逻辑被赋予了它并无正当权利拥有的属性，它便不值得重视。一个与语言的发展本身相伴、在哲学最重大的问题和最著名的论证上留下印记的体系，不可能完全不值得注意。还必须承认，记忆和习惯与理智过程大有关系；古代逻辑的某些规则几乎已经织入有教养心灵的思维纹理之中。但是，那些用以展示换位和三段论特定规则的助记形式是否具有任何真正的效用--它们被认为传授的那种技能，是否不能以对心智能力更大的益处，由一个任其自身资源的心智在无辅助的努力中获得--这些问题仍然值得考察，并非无益。至于本章所推得的特定结果，应当指出，它们仅仅旨在辅助关于普通逻辑或经院逻辑之性质、及其与更完善的演绎推理理论之关系的探究。

第十六章

论概率理论

1. 再过不到一年，就将满整整两个世纪，自帕斯卡解决了概率论中第一个已知问题，并在其解答中奠定了一门科学的基础--这门科学所拥有的吸引力，绝不亚于较为抽象的数学思辨所具有的吸引力。骑士德·梅雷--一个据说好赌的人--向波尔·罗亚尔的隐士(此人尚未因对“人的伟大与悲惨”的更令人分心的沉思而退出对科学的关注[1])提出的那个问题，是一长串问题中的第一个，这些问题注定要催生数学分析中的新方法，并在生活的实际事务中提供宝贵的服务。这一主题的趣味也并不仅仅在于其数学关联或实用联系。投入概率论研究的注意力会得到回报--无论是将其作为思辨的独立对象，还是考察它被构想的基本方式，考察那些如同在同时代的力学中那样逐渐被附加于它的重大次级原则，最后，还是评估实际已达到的完善程度。我在这里所说的完善，是指概念的统一与过程的和诸所构成的完善。本章打算非常简要地考察其中若干要点。

2. 一位杰出的作者[2]这样陈述了这门科学的基本定义：

“一个事件的概率，就是我们相信它已经发生或将会发生的理由。”

“一个事件的概率的度量，是有利于该事件的情况数目与有利或不利且全部同等可能(同等可能发生)的情况总数之比。”

从这些定义可以推出，概率一词在其数学含义上，关涉到我们关于一个事件可能发生或不发生所处情况的知识状态。随着信息程度的

---

1 特别参见帕斯卡致费马的一封信，费马曾提请其注意一个数学问题(《波尔罗亚尔》，圣伯夫先生著)；另见各处段落

M.Prosper Faugère 出版的《残篇集》。

2 泊松，《关于判决概率的研究》。

我们关于一个事件所处情况的了解，我们据以认为它将会发生的理由，或者用一个词来说，我们对它的期望，将会变化。概率是建立在部分知识之上的期望。对影响一个事件发生的全部情况的完善认识，将把期望变为确定性，既不留有也不要求概率论。

3. 尽管我们对某一事件的预期，随着有利于其发生的已知事例数目与全部同等可能事例(无论有利或不利)数目之比增大而增强，但若断言这种预期强度--被视为心灵的一种情感--能够被归附于任何数值标准，那将是不合哲学的。性情乐观的人在怯懦者绝望之处构筑高昂的希望，而优柔寡断者则迷失于疑虑之中。作为科学探究的对象，意见与感觉之间存在着某种类比。温度计和精心制备的照相底片所指示的，并非热与光的感觉强度，而是伴随那些感觉之产生而出现的某些物理境况。概率论同样也考虑预期所依据的境况的数值度量；而这一对象涵盖了其正当应用的全部范围。我们在人寿保险以及概率论的其他统计应用中所使用的规则，完全独立于预期的心理现象。它们建立在如下假设之上：未来将与过去相似；在相同境况下，同一事件将以确定的数值频率趋于重现；而非建立在任何试图将人类希望与恐惧的强度交付计算的尝试之上。

如今经验确实证明，某一给定种类的事件在给定境况下，无论其真正原因为我们所知或未知，都趋于以确定的频率重现。当然，这种趋势一般只有在观察范围足够大时才得以显现。一个伟大民族的司法记录、其按年龄与性别等登记的出生与死亡登记册，年复一年呈现出显著的齐一性。在某一给定语言或语系中，相同的音及其连续、以及(若为书面语言)相同的字符及其连续，以确定的频率重现。爱尔兰各地所发现的粗陋的欧甘铭文--其中起初无法辨识出任何词的区分--其解读之钥正是通过严格应用这一原理而得以恢复的。[3]据了解，同样的方法已被应用于[4]解读最近由莱亚德先生的进取精神从尼尼微废墟中发掘出的楔形文字记录。

4. 让我们从上述陈述和定义出发，努力形成关于概率论合法对象的概念。

---

3 这一发现归功于都柏林大学数学教授查尔斯·格雷夫斯牧师(Rev.Charles Graves)。--参见《爱尔兰皇家科学院院刊》，1848年2月14日。格雷夫斯教授告知我，他已通过为所有欧洲语言构造序列表验证了这一原理。

4 由博学的东方学家爱德华·欣克斯博士。

有人说，概率在于建立在一种特定知识之上的预期，即关于事件发生的相对频率的知识。因此，事件的概率、或事件组合的概率，无论是由关于事件发生所依据的事物特定构造的知识推得，还是由对其过去一系列发生与未发生的长期观察导出，在一切情况下都构成我们的数据。某一相关联事件、或事件组合的概率，构成相应的所求项，即所寻求的对象。如今，在"事件"一词最一般却又严格的意义上，每一事件组合也构成一个事件。两个或多个事件的同时发生，或某一事件在给定条件下、或在与其他事件的任何可设想联系中的发生，仍然是一个事件。在这一应用的自由度上使用该词，概率论的对象或可如此定义：给定任何事件的概率，无论其种类如何，求与它们相关联的某一其他事件的概率。

5. 事件可以分为简单事件或复合事件，后一词用于指由简单事件组合而成的事件(I.13)。以这种方式，我们可以将其定义为：所考察理论的实践目的，是从其他事件--简单或复合--的给定概率出发，确定某个事件--简单或复合--的概率，而按照其定义的条件，该事件与那些其他事件处于联系之中。

因此，如果从骰子的构造已知存在一个概率，以分数$\frac{1}{6}$,即任何特定投掷的结果将是一个幺点，并且如果要求确定在连续两次投掷中出现一个幺点且仅出现一个幺点的概率，我们可以按照其数据和所求的顺序陈述该问题如下：

第一数据。--第一次投掷将给出幺点这一事件的概率 = $\frac{1}{6}$.

第二数据。--第二次投掷将给出幺点这一事件的概率 = $\frac{1}{6}$.

所求。--如下事件的概率：或者第一次投掷给出幺点而第二次不给幺点；或者第一次不给幺点而第二次给出幺点。

这里两个数据是简单事件的概率，即第一次投掷出现幺点、第二次投掷出现幺点。所求项是一个复合事件的概率--即数据中所涉及或隐含的简单事件的某种析取组合。很可能通常会出现这样的情况：当一个问题的数值条件能够如上所述从其存在所依据的事物构造中推得时，数据将是简单事件的概率，而所求项则是依赖于所述简单事件的一个复合事件的概率。研究概率论的人们或许过度关注的一类问题即属此情形，即机遇与技巧的游戏；在前者中，某种物理境况，如

骰子的构造，决定了游戏每一可能步骤的概率，其结果则是那些步骤的某种确定组合；而在后者中，游戏者的相对灵巧--被假定为先验已知--同样决定了同一元素。但是，当如在统计问题中那样，我们的知识元素并非取自对事物构造的研究，而是取自对自然或人类社会的记录观察时，则没有理由认为这类观察所提供的数据应当是简单事件的概率。相反，事件或境况以显著组合的方式发生(暗示某种因果性的秘密联系)，向我们提示：应当通过对其频率的数值记录，使这类同时发生之事有益于未来的指导。如此，这类观察所提供的数据便是复合事件的概率。因此，通过某种一般方法求解涉及此类数据的问题，不仅对于概率论的完善展开是本质性的，而且对于将其应用于一大类具有实际重要性的探究而言，或许也是必要的条件。

6. 在我们着手估计已知方法可在多大程度上应用于解决上述这类问题之前，先注意到以下一点将是有益的：概率论中的所有问题都可以从另一种形式来看待；这种形式在于用断言那些事件已经发生或将会发生的命题，来替换事件；并把数值概率的元素视为关涉那些命题的真理，而非关涉它们所断言的那些事件的发生。于是，与其把数值分数 p 看作表达事件 E 发生的概率，不如把它看作表示命题 X 为真的概率，该命题断言事件 E 将会发生。同样，与其把任何概率 q 看作关涉某个复合事件，例如事件 E 与 F 的共现，不如让它表示断言 E 与 F 将共同发生的命题为真的概率；并以同样方式，把事件的析取组合与假言组合转换为析取命题与条件命题。尽管这样赋予概率的新应用是旧应用的必要伴随物，但采纳它将会带来一种实际的好处，这来自以下情况：我们已经讨论了命题的理论，定义了它们的主要种类，并建立了在每一场合确定其相互依赖的程度与性质的方法。任何一般的概率理论都必须立足于这一点，或立足于某种等价的基础之上。我并不是说，在应用理论的某些场合中，其他考虑可能并非必需。数据可能被证明不足以给出确定的解答，而人们可能认为有必要通过假说来补充这一缺陷。或者，在涉及大数陈述的地方，在解答之后可能由此产生困难，需要特殊的处理方法。但在每一实例中，都涉及如上所述(第4条)的一般问题的某种形式，而理论的正当且特有的工作就在于对该问题的讨论。我希望人们注意到，正是为了这一目标，

以下各章的探讨主要致力于此。除附带涉及外，不打算进入包含补充假说的问题，因为首要的是--即使就此类问题而言(I.17)--首先建立一个建立在坚实而充分的理论基础之上的一般方法。

7. 以下主要是取自拉普拉斯的一个概要，说明已被应用于解决概率问题的各项原理。它们是已经陈述过的基本定义的推论，并可被视为指示了使那些定义可供使用的可能程度。

第一原理。如果 p 是任何事件发生的概率，那么 1 – p 将是其不发生的概率。

第二，两个独立事件同时发生的概率是这两个事件概率的乘积。

第三，两个相依事件同时发生的概率，等于其中一个事件的概率与在该事件发生的条件下另一事件也将发生的概率之乘积。

第四。如果事件 E 发生，则事件 F 也将发生这一概率，等于事件 E 与 F 同时发生的概率除以 E 发生的概率。

第五，两个不能同时发生的事件中任一事件发生的概率，等于它们各自概率之和。

第六，如果一个观察到的事件只能由`先验地同等可能的n个不同原因中的某一个所导致，那么其中任一原因的概率就是一个分数，其分子是在该原因存在的假说下该事件的概率，其分母是相对于所有原因的类似概率之和。

第七。一个未来事件的概率，等于将每一原因的概率乘以若该原因存在则所述未来事件将会发生的概率，再把所得各乘积相加之和。

8. 关于这些原理的范围和相对充分性，可以作出以下观察。

1. 通过这些原理的恰当组合，总是可以表达一个复合事件的概率，该复合事件以任何方式依赖于其各自概率已给定的独立简单事件。实际已解决的大部分问题都属于这一类，而解决它们的困难并非源于概率论所提供指示的不充分，而是源于需要一种分析，使得当由此引入大数的函数或由许多复杂项组成的级数时，那些指示能够被利用。因此，可以充分承认，所有以独立简单事件的概率为其数据的问题都属于公认方法的范围。

其次，上述列举的某些原理，尤其是第六条和第七条，并不预先假定所有数据都是简单事件的概率。然而，在它们对因果性问题的特殊应用中，它们确实如此，

假定他们所考虑的那些原因是互斥的，以致它们在产生一个结果时不可能有任何组合。如果像前面所解释的那样，我们把数值的概率从与它们相联系的那些事件转移到表达那些事件的那些命题上，那么上述原理所可应用的最一般的问题，可以按照数据与所求的如下次序来陈述。

数据。

第一，条件命题的概率：

如果原因 A 1 存在，事件 *E* 将随之发生；
？ A 2 ？ *E* ？
. . . . . .
？ 一个 *n* ？ *E* ？

第二，那些命题的前件相互冲突的条件。

要求。

宣告事件E发生的那个命题为真的概率；并且，当那个命题已知为真时，肯定各原因A^1,A^2...An各自发生的那些命题为真的概率。

这里可以看到，数据是一系列复合事件的概率，由条件命题表达。但这个系统显然是一个非常有限且特殊的系统。因为各命题的前件都受制于彼此互斥这一条件，而且整个系统中只有一个后件，即事件 E。从我们能够讨论如上这样的系统，并不能推出我们能够解决其数据为任何条件命题系统的概率的问题；更不能推出我们能够解决其数据为任何命题系统的概率的问题。而且，从质料而非形式的方面来看待这一主题，显然，互斥因果关系的假说并不是在现实世界中经常实现的，现实世界的现象似乎通常是复杂原因的产物，而这些原因协同作用的程度与性质是未知的。毫无疑问，在自然探究或社会探究的几乎一切部门中，只要概率学说为有用的应用提供了任何新的希望，情况就是如此。

9.在上述原理之外，我们还可以补充另一条原理，它已由牛津大学萨维尔天文学教授用如下措辞陈述过。[5]

“原理8. 若有任意数目的互斥假说，h^1,h^2,h^3,...它们相对于某一特定信息状态的概率为p^1,p^2,p^3,...，并且若给出新的信息，它改变了

5 论与概率论有关的某些问题；作者 W.F.Donkin，文学硕士，F. R.S.等，《哲学杂志》，1851年5月。

其中某些假说的概率，假定是hm^{+1}及其后所有各项的概率，而并不以其他方式涉及其余各项；那么这些后者的概率在获得新信息之后彼此之间的比值，与它们在此之前所具有的比值相同，即

$$p'_1 : p'_2 : p'_3 \ldots : p'_m = p_1 : p_2 : p_3 \ldots : p_m,$$

其中带重音的字母表示获得新信息之后的值。”

这条原理显然比前面所列举的大多数原理具有更为根本的性质，也许正如唐金(Donkin)教授所提示的那样，它可以被视为公理。它似乎确实建立在概率测度的定义本身之中，即“有利于某一事件的场合数与有利于或不利于该事件、且全都同等可能的场合总数之比”。因为，采纳这一定义，显然，同等可能的场合数无论以何种比例减少，而有利的场合数保持不变，那么这些场合所关涉的任何事件的概率就将以完全相同的比例增加。并且，既然新的假说，即减少可能场合的数目而不影响其中有利于所论事件的那些场合的数目，以恒定的比率增加那些事件的概率，那么这些概率的相对测度就保持不变。那么，如果我们正在考察的这条原理如它看上去那样不可分割地包含在概率的定义本身之中，它本身在解决问题时几乎不能把我们引得比单纯仔细研究该定义所能引得更远。从这些考虑来看，以下一点似乎是可疑的：若无某种与我们迄今所注意到的任何援助都不同的援助，是否还能指望在作为思辨知识一个分支的概率理论中，或在其问题的实际解决中，取得任何可观的进展。而仅仅立足于如上任何这样一组原理的汇集，建立一种普遍适用于解决问题的方法，而既不考虑其数据的表达中所涉及的命题的数目，也不考虑其性质，这似乎是不可能的。为达到这样一个目标，还需要其他元素，对它们的考察将占据下一章。

第十七章

关于概率论中问题求解的一般方法的论证。

1. 前面已经定义过(XVI.2),“一个事件的概率的度量，是有利于该事件的情形数目与有利或不利的、且全都同等可能的情形总数之比。”在以下研究中，概率一词将在上述“概率的度量”的意义上使用。由上述定义我们可以推出以下结论。

I.当一个事件必定发生时，该事件在上述数学意义上的概率为1。因为在这个场合，有利于该事件的情形与可能的情形是相同的。

因此，若p是事件x将发生的概率，则1−p将是所述事件不发生的概率。为直接从定义推出这一结果，设m为有利于事件x的情形数目，n为可能的情形数目，则n−m是不利于事件x的情形数目。因此，按定义，

$\frac{m}{n}$=概率即x将发生。n−m=x将不发生的概率。

$\frac{n-m}{n}$

但是

$$\frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - p.$$

II.任意两个事件同时发生的概率，是其中任一事件的概率与在该事件发生的条件下另一事件也将发生的概率之积。

Let m be the number of cases favourable to the happening of the first event, and n the number of equally possible cases unfavourable to it; then the probability of the first event is, by definition, $\frac{m}{m+n}$. Of the m cases favourable

to the first event, let l cases be favourable to the conjunction of the first and

第二个事件，那么，按定义，$\frac{l}{m}$是那个概率即如果那个第一个事件发生，第二个也将发生。将这些分数相乘，我们得到

$$\frac{m}{m+n} \times \frac{l}{m} = \frac{l}{m+n}.$$

但所得分数lm+n以有利于事件同时发生的情形数目为其分子，并以可能情形的数目m+n为分母。因此，它表示两个事件同时发生的概率。

因此，若p是任一事件x的概率，而q是若x发生则y将发生的概率，则合取xy的概率将是pq。

III.若事件x发生则事件y将发生的概率，是一个分数，其分子是它们同时发生的概率，分母是事件x发生的概率。

这是第二原理的直接推论。

IV.一系列互斥事件中某一个发生的概率，等于它们各自概率之和。

因为设n为可能情形的数目；m^1为其中有利于第一个事件的情形数目；m^2为有利于第二个事件的情形数目，等等。那么这些事件各自的概率是$^{m1}n,^{m2}$

—— $\frac{}{n}$,等等。又，由于那个

事件是互斥的，有利于其中之一的场合没有一个有利于另一个；因此，有利于该系列中某一个的场合数将是 $m^1 + m^2$ ...，而该系列中某一个发生的概率将是$^{m1+m2..}$。但这就是前面那些分数之和，$^{m1}\ n\ ,^{m2}$

$$\frac{\qquad\qquad}{n} \qquad\qquad —— \frac{}{n},$$

等等。由此该原理便显而易见了。2. 定义。--当两个事件中任一事件发生的概率不受我们对另一事件发生或不发生的预期的影响时，这两个事件被称为独立的。

由这一定义，结合原理II.，我们得到以下结论：

V.两个独立事件同时发生的概率，等于这两个事件各自概率之积。

因为若 p 是事件 x 的概率，q 是事件 y 的概率，而 y 被视为与 x 完全独立，那么 q 也是当 x 发生时 y 将发生的概率。因此，根据原理 II.,pq 是 x 与 y 同时发生的概率。在同样的情况下，x 发生而 y 不发生的概率将是 p(1 –q)。因为 p 是 x 将发生的概率，而 1 –q 是 y 将不发生的概率。同样地，(1 –p)(1 –q) 将是两个事件都不发生的概率。

3.还存在另一条原理，其性质与上述原理不同，但对本章随后的研究是必要的；在着手明确陈述它之前，我想先作一两点初步的说明。

我首先要指出，简单事件与复合事件之间的区分并非建立在事件本身的性质之中，而是建立在它们呈现于心灵的方式或联系之上。例如，“身体健康”、“兴旺发达”等项中蕴含着多少独立的特称，而其中每一个仍然可以被视为表达了一个“简单事件”？语言的规定性用法——它将单一而确定的名称赋予特定的事件组合，而将无数其他组合留给由不同项或短语的相应组合来表达——本质上是任意的。因此，当我们把那些由单个动词、或由语法学家所称的简单句所表达的事件称为简单事件时，我们并不因此暗示这些事件本身具有任何真正的简单性，而仅仅是参照语法表达来使用这个项。4. 现在，如果这种将事件分为简单或复合的区分并非建立在其真实性质之中，而是依赖于语言的偶然特征，那么它就不能影响它们相互依赖或独立的问题。如果我对两个简单事件的知识仅限于这一特定事实，即其中一个事件发生的概率为p，另一个为q；那么我将这些事件视为独立的，并据此断言它们共同发生的概率为pq。但这种断言的根据并非这些事件是简单事件，而是数据没有提供任何关于它们之间任何联系或依赖的信息。当事件的概率被给出，但所有关于其依赖关系的信息被扣留时，心灵将它们视为独立的。而这种思维方式同样是正确的，无论这些事件按照实际表达来判断是简单的还是复合的，即无论它们每一个是由单个动词表达还是由动词的组合表达。

5. 然而，假定除了某些事件的概率之外，我们还拥有关于它们可能组合的某些确定信息。例如，已知某些组合被排除而不能发生，因此只有其余的组合是可能的。那么，同样的普遍原理仍然适用。我们在计算任何可以设想的事件结局的概率时利用这一信息的方式，并不取决于那些其概率及其可能联系的限制被给出的事件的性质。它们是简单的还是复合的，无关紧要。关于它们的概率以及它们之间联系关系的知识来自何种来源、通过何种方法获得，也无关紧要。我们必须把这些事件视为独立于我们所获信息之外的任何联系，认为这种信息究竟是在数据中明确传达给我们的，还是由此通过逻辑推论得出的，都无关紧要。这就引导我们陈述所讨论的普遍原理，即：

VI.其概率已给出的那些事件，应被视为独立于任何联系，除非这种联系在数据中已被表达或必然隐含；而我们运用关于那种联系的知识的方式，独立于这种知识所由获得的来源的性质。

上述原理的实际重要性在于这样一种情况：无论那些其概率被给出的事件的性质如何--无论那个其概率被寻求的事件的性质如何，我们总是能够通过应用逻辑演算，把后一事件表达为前一些事件的确定组合，并明确地指定连接前一些事件彼此之间的全部隐含关系。换言之，我们能够确定所要求其概率的是给定事件的何种组合，以及它们的哪些组合是唯一可能的。于是，由上述原理可以推出，我们可以对这些事件进行推理，就好像它们是简单事件一样，其可能组合的条件已由经验直接给出，而其中某个确定组合的概率是被寻求的。概率中一般方法的可能性就取决于这一还原。

6.由于我们即将着手的研究以逻辑演算的运用为基础，因此有必要解释某些源自这一应用的术语和表达方式。

所谓事件x，我指的是这样一个事件：肯定其发生的那个命题由方程

$$x = 1.$$

By the event $\phi(x, y, z, \dots)$, I mean that event of which the occurrence is expressed by the equation

$$\phi(x, y, z, \dots) = 1.$$

以记号方式表达出来。这样一个事件，相对于其概念所包含的简单事件x、y、z，可以称为复合事件。因此，若x表示事件“下雨”,y表示事件“打雷”，这些事件各自的发生由逻辑方程

$$x = 1, \quad y = 1,$$

来表达，那么x(1 – y) + y(1 – x)将表示命题“或者下雨或者打雷，但不同时发生”所指称的事件或事态；该事态的表达为

$$x(1 - y) + y(1 - x) = 1.$$

为简洁起见，若我们用 V 表示上述意义下所使用的函数 phi(x, y, z, ...)，则显然(VI.13)对偶律

$$V(1 - V) = 0,$$

将恒被满足。

当简单事件 x、y、z 不能自由地以一切可能的组合出现时，亦即当依赖于它们的某个复合事件被排除而无法发生时，这些简单事件便被称为“受条件的”。因此，由命题“下雨”、“打雷”所表示的事件是“受条件的”

如果由命题“打雷，但不下雨”所表示的事件被排除而不会发生，以致可能的范围小于可设想的组合的范围。简单的无条件事件按定义是独立的。

任何复合事件同样地被称为受条件的，如果假定它只能在一定条件下发生，即与某个其他事件相结合而发生，而该其他事件以其出现构成那个条件。

7. 我们将按照思想的自然顺序进行，从简单的、无条件的事件到复合的、受条件的事件。

命题一。

1. 若 ， ， 分别是任意无条件简单事件 ， ， 的概率，则任意复合事件的概率将为[V] ，此函数[V] 由在函数中将记号 ， ， 变为 ， ， ， *&c.*而成。

2. 在同样的情况下，若事件发生，则任何其他事件也将发生的概率，将为[VV']即把逻辑函数与相乘，并在结果中将 ， ， ， *&c.*变为 ， ， ， *&c.*所得的结果。$[V']$ *denotes the result of* $[VV']$ *divided by* $[V]$ *, where* $[VV']$ *denotes*

让我们首先把注意力限于两个简单事件 x 与 y 的可能组合，它们的各自概率为 p 与 q。这些事件的原初组合(V.11)及其相应的概率如下：

EVENTS.		PROBABILITIES.
$xy,$	x 与 y 同时发生，x 发生而 y 不发生，y 发生而 x 不发生，x 与 y 共同不发生，	$pq.$
$x(1-y),$		$p(1-q).$
$(1-x)y,$		$(1-p)q.$
$(1-x)(1-y),$		$(1-p)(1-q).$

我们看到，在这些情形中，由一个成分所表示的复合事件的概率，是 p 与 q 的同一函数，正如该事件的逻辑表达式是 x 与 y 的同一函数一样；而且显然，无论其概率已给出的简单事件的数目是多少，也无论这些事件的共同存在或不发生牵涉到我们所求其概率的那个复合事件之中，这一评述都适用。

其次，考虑上述成分的任何析取组合。用日常语言表达为“或者事件 x 发生而事件 y 不发生，或者事件 y 发生而事件 x 不发生”的复合事件，用符号表示为 x(1 – y) + y(1 – x)，其概率由原理 iv.和 v.确定，为 p(1 – q) + q(1 – p)。后一表达式是 p 和 q 的同一函数，正如前一表达式是 x 和 y 的同一函数。显然，这也是某条普遍规则的一个具体例证。

由任何两个或多个成分所表达的事件是互斥的。它们唯一可能的组合是一个析取组合，在普通语言中由连词或表达，在符号逻辑的语言中由记号+表达。现在，从一组互斥事件中某个事件发生的概率是它们各自概率之和，并通过用记号+连接那些各自概率的表达式来表达。因此，上述例示的规律被视为是普遍的。任何无条件事件V的概率将通过把V中的记号x, y, z, ...变为p, q, r, ...而求得

8. 又，根据原理 iii.，若事件 V 发生，则事件 V′将随之发生的概率，用一个分数表示，其分子是 V 与 V′共同发生的概率，分母是 V 发生的概率。

现在，由事件V和V′的共同发生所构成的那个事件或事物状态的表达式，将按照逻辑演算的规则，通过把表达式V和V′相乘而形成；因为凡在V和V′两者中都被发现的成分，都将出现在乘积中，且没有其他成分。再者，根据刚才所表明的，由那个乘积所表示的事件的概率，将通过把其中的x, y, z变为p, q, r, ...来确定。因此，所求的分子将是[V V′]按定义所表示的东西。而分母将是[V]，因此

$$\text{Probability that if } V \text{ occur, } V' \text{ will occur with it } = \frac{[VV']}{[V]}.$$

9. 例如，若简单事件 x, y, z 的概率分别为 p, q, r，而要求找出若 x 或 y 发生，则 y 或 z 将发生的概率，我们便得到前件与后件的逻辑表达式如下--

$$\begin{aligned} &\text{1st. Either } x \text{ or } y \text{ occurs, } x(1-y)+y(1-x).\\ &\text{2nd. Either } y \text{ or } z \text{ occurs, } y(1-z)+z(1-y). \end{aligned}$$

现在，若我们按照逻辑演算的规则把这两个表达式相乘，我们便得到前件与后件共同发生的表达式，

$$xz(1-y)+y(1-x)(1-z).$$

在此结果中把 x, y, z 换成 p, q, r,，并同样地变换前件的表达式，我们便求得所求概率的值为

$$\frac{pr(1-q)+q(1-p)(1-r)}{p(1-q)+q(1-p)}.$$

在如上情形中，演算的特殊职能在于代替理性的职责，以确定究竟有哪些情况同时牵涉于后件与前件之中。然而这一应用的优点

几乎完全是前瞻性的，并将在随后的一个命题中显示出来。

命题二。

10. 已知某些简单事件在某一条件得到满足时的概率分别为 ；在表达式中它们是的函数。求事件 ， 的绝对概率，即它们各自独立于条件 *V*.而发生的概率。

设 p′、q′、r′等等为所求的概率，即事件 x、y、z、.....的概率，这些事件不仅被视为简单的，而且被视为独立的事件。于是根据命题 i.，当由逻辑方程 V = 1 所表示的条件 V 得到满足时，这些事件将发生的概率为

$$\frac{[xV]}{[V]}, \quad \frac{[yV]}{[V]}, \quad \frac{[zV]}{[V]}, \ \&\text{c.},$$

其中[xV]表示按照逻辑演算的规则把 V 乘以 x，并在结果中把 x、y、z 换成 p′、q′、r′等等而得到的结果。但上述受条件的概率按假说分别等于 p, q, r, ...。因此我们有，

$$\frac{[xV]}{[V]} = p, \quad \frac{[yV]}{[V]} = q, \quad \frac{[zV]}{[V]} = r, \ \&\text{c.},$$

由这个方程组的方程数目与量 p′, q′, r′, ...的数目相等，这些量的值便可确定。

现在 xV 仅仅由 V 中以 x 为因子的那些成分组成。令此和用 V x 表示，并同样地令 yV 用 V y 表示，等等。我们的方程于是采取如下形式

$$\frac{[V_x]}{[V]} = p, \quad \frac{[V_y]}{[V]} = q, \ \&\text{c.},$$

where $[V_x]$ denotes the results obtained by changing in V_x the symbols x, y, z, &c., into p', q', r', &c.

为了使一般问题的意义及其解法的原则更加明显，让我们举下面的例子。假设在从瓮中抽球时，只注意了那些所抽出的球或是具有某种特定颜色“白”，或是具有某种特定构成“大理石”，或同时带有这两个特征的情形，而没有记录那些所抽出的球既不是白也不是大理石的场合。于是，设已发现，每当所设想的条件得到满足时，抽到一个白球的概率为 p，抽到一个大理石球的概率为q：并且仅从这些数据出发，要求求出在下一次抽取中，不参照

在上述条件下，抽到白球的概率；以及抽到大理石球的概率。

这里，如果 x 表示抽到白球，y 表示抽到大理石球，那么条件 V 将由逻辑函数表示

$$xy + x(1-y) + (1-x)y.$$

因此我们有

$$V_x = xy + x(1-y) = x, \quad V_y = xy + (1-x)y = y;$$

由此

$$[V_x] = p; \quad [V_y] = q;$$

而问题的最终方程是

$$\frac{p'}{p'q' + p'(1-q') + q'(1-p')} = p, \quad \frac{q'}{p'q' + p'(1-q') + q'(1-p')} = q;$$

由此我们求得

$$p' = \frac{p+q-1}{q}, \quad q' = \frac{p+q-1}{p}.$$

可以看出，p ′和 q ′分别与 p 和 q 成比例，正如按照 Donkin 教授的原理它们应当如此。这一类问题的解法，实际上可以通过直接应用该原理而得到。

为了回应一个可能的反对意见，我在此说明，上述推理并不要求白球和弹珠球的抽取依据球的物理构造而相互独立。对它们独立性的假定确实包含在解答之中，但它并不依赖于任何关于球的性质及其关系、或其在形状、颜色、结构等方面有无关系的先在假定。它建立在我们对所有这些事物的完全无知之上。概率始终与我们实际知识的状态相关，其数值随信息的变化而变化。

命题三。

11. 在任何概率问题中，确定所求事件与已知数据之间的逻辑联系；也就是说，把所求其概率的事件，表示为已知其概率的事件的逻辑函数。

设 S、T 等表示任何其概率已给定的复合事件，S 和 T 在表达式中是记号 x、y、z 等的已知函数，这些记号表示简单事件。类似地，设 W 表示任何其概率被寻求的事件，W 也是 x、y、z 等的已知函数。由于 S, T, ...W 必须满足对偶性的基本定律，我们被允许用单个逻辑记号 s, t, ...w 来替换它们。于是假定

$$s = S, t = T, w = W.$$

These, by the definition of $S, T, \ldots W$, will be a series of logical equations connecting the symbols $s, t, \ldots w$, with the symbols $x, y, z \ldots$

通过逻辑演算的方法，我们可以从上述系统中消去记号 x, y, z, ...中的任何一个，这些记号表示其概率未被给出的事件，并把 w 确定为 s、t 等等的展开式函数，以及--如果存在的话--那些对应于其概率已被给出的事件的记号 x、y、z 等等的展开式函数。结果将具有如下形式

$$w = A + 0B + \frac{0}{0}C + \frac{1}{0}D,$$

其中 A、B、C 和 D 共同包含了所有可能的成分，这些成分可以由记号 s、t 等等，即由所有表示其概率已被给出的事件的记号构成。

上述内容显然就是所求关系的完整表达。因为它完全确定了由单一记号 w 所表示的事件 W，将其表示为以类似方式由记号 s、t 等等所表示的事件的函数或组合，并且它按照逻辑演算的规律指定了条件

$$D - 0,$$

作为在 s、t 等等彼此之间建立联系的条件。因此，我们可以根据原理 vi.，把 s、t 等等视为简单事件，它们的组合 w 以及与之相关联的条件 D 都是确定地给出的。

由于化简的逻辑过程应当保持一致，我在此说明一般将遵循的顺序。

12. 由(viii.8)，原始方程可化为以下形式

$$\begin{aligned} &s(1-S) + S(1-s) = 0; \\ &t(1-T) + T(1-t) = 0; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &w(1-W) - W(1-w) = 0; \end{aligned} \tag{1}$$

在此条件下它们可以相加而不损害其意义。然后我们可以分别或一起消去记号 x、y、z。如果选择后一种做法，则有必要在将系统的方程相加之后，就所有待消去的记号展开结果，并令各成分系数的乘积等于 0(vii.9)。

由于 w 是所求其表达式的记号，我们还可以根据第 ix 章命题 iii.，将消元的结果表示为如下形式

$$Ew + E'(1-w) = 0.$$

E 和 E′通过依次在一般系统(1)中令 w = 1 和 w = 0，并消去记号 x、y、z、...而分别确定。于是，分别用以确定 E 和 E′的单个方程变为

$$\begin{aligned} &s(1-S) + S(1-s) + t(1-T) + T(1-t) \ldots + 1 - W = 0; \\ &s(1-S) + S(1-s) + t(1-T) + T(1-t) + W = 0. \end{aligned}$$

由此只剩下消去 x、y、z 等等，并通过随后的展开式确定 w。在消元过程中，如有需要，我们可以利用第 ix 章命题 i.和 ii.的化简。

13. 如果数据除了告知我们各事件的概率之外，还进一步在它们之间指定了任何明确的联系，那么这种联系必须在逻辑上加以表达，并将由此形成的一个或多个方程引入一般系统。

命题四。

14. 给定任意事件系统的概率；以一般方法确定
方法，任何其他事件的后续概率或派生概率。

如上一命题中那样，设 S、T 等等为其概率已被给出的事件，W 为所求其概率的事件，这些事件是 x、y、z 等等的已知函数。让我们将数据表示如下：

$$\begin{array}{l}\text{的概率 =}\\ \text{T 的概率 = q;}\end{array} \tag{1}$$

等等，p、q等为已知数值。若以s表示复合事件S，t表示T，w表示W，则由上一命题可得，

$$w = A + 0B + \frac{0}{0}C + \frac{1}{0}D; \tag{2}$$

A, B, C, and D being functions of s, t, &c. Moreover the data (1) are transformed into

$$\text{Prob. } s = p, \quad \text{Prob. } t = q, \text{ &c.} \tag{3}$$

现在方程(2)可分解为该系统

$$\left.\begin{array}{c} w = A + qC \\ D = 0, \end{array}\right\} \tag{4}$$

q 是一个不定类记号(VI.12)。但由于根据成分的性质(V.命题 iii.)，我们有

$$A + B + C + D = 1,$$

上述系统的第二个方程可以表示为以下形式

$$A + B + C = 1.$$

如果我们用 V 表示函数 A + B + C，则系统(4)变为

$$w = A + qC; \tag{5}$$

$$V = 1. \tag{6}$$

让我们暂时考虑这一结果。由于 V 是 s、t 等的成分项级数之和，它表示其中所涉及的简单事件是由 s、t 等所表示的那些事件的复合事件。因此(6)表明，由 s、t 等表示、其概率为 p、q 等的事件具有这样的概率，并非作为独立事件，而是作为服从某一条件 V 的事件。方程(5)将 w 表达为同样受条件的相同事件的组合。

现在，根据原理 vi.，获得这种关于事件联系的知识的方式，并不影响在获得之后运用它的方式。我们必须对它进行推理，就好像经验把事件 s、t 等等作为简单事件呈现给我们一样，这些事件可以自由地进入每一种组合，但在实际受条件 V 约束时，分别具有概率 p、q 等等。

那么，设 p', q', ...， 为当限制 V 被移除时这类事件的相应概率。那么根据本章命题 ii.，这些量将由如下方程组确定，

$$\frac{[V_s]}{[V]} = p, \qquad \frac{[V_t]}{[V]} = q, \ \&\text{c.}; \tag{7}$$

and by Prop. I. the probability of the event w under the same condition V will be

$$\text{Prob. } w = \frac{[A + cC]}{[V]}; \tag{8}$$

其中 Vs 表示 V 中那些以 s 为因子的成分之和，而 [Vs] 表示当 s、t、.....分别变为 p′、q′、.....时该和变成什么。常数 c 表示不定事件 q 的概率；因此它是任意的，可以取 0 到 1 之间的任何值。现在将会注意到，p′、q′ 等的值仅由 (7) 确定，只是为了将它们代入 (8)，从而使 Prob. w 成为已知量 p、q 等的函数。因此显然，我们可以用任何其他字母如 s、t 等以相同的定量含义来代替字母 p′、q′ 等。这一特称步骤仅仅涉及记号 s、t 等的含义变化——它们不再是逻辑的，而成为数值的。系统 (7) 和 (8) 于是变为

$$\frac{V_s}{V} = p, \quad \frac{V_t}{V} = q, \ \&\text{c.}; \tag{9}$$

$$\text{Prob. } w = \frac{A + cC}{V}. \tag{10}$$

在运用这些方程时，只需从(9)中把 s、t 等等视为定量记号，用 p、q 等等表示出来，并将所得的值代入(10)。显然，s、t 等等，由于它们表示概率，将是正的真分数。

系统(9)可以更对称地表示为以下形式

$$\frac{V_s}{p} = \frac{V_t}{q} \ldots = V. \tag{11}$$

或者我们可以把(9)和(10)一起用对称系统来表示

$$\frac{V_s}{p} = \frac{V_t}{q} \ldots = \frac{A + cC}{u} = V; \tag{12}$$

其中u表示Prob.w。

15. 剩下要解释的是常数 c，它被假定表示不定事件 q 的概率。现在，逻辑方程

$$w = A + qC,$$

按相反顺序解释，意味着如果事件 A 发生，或者事件 C 与事件 q 相关联地发生，则事件 w 将发生，否则不发生。因此 q 表示这样一种条件：在该条件下，如果事件 C 发生，则事件 w 将发生。但 q 的概率是 c。因此，c = 如果事件 C 发生则事件 w 将发生的概率。

因此，根据原则 ii.,

$$c = \frac{\text{概率的同时发生的C与w}}{C \quad \text{的概率}}$$

我们由此可以确定那种新经验的性质，从它那里可以获得 c 的实际值。因为如果我们在 C 中用 s、t 等作为简单事件 x、y、z 等的函数来替换它们的原始表达式，我们就会形成那个事件的表达式，其概率构成上述 c 值的分母；而如果我们用 w 的原始表达式乘以那个表达式，我们就会形成那个事件的表达式，其概率构成 c 的分子，并且这个事件的频率与前一个事件的频率之比，由新的观察确定将给出 c 的值。这里需要指出，常数 c 并不必然出现在问题的解中。只有当数据不足以确定所寻求的概率时，这个任意元素才会出现，而在这种情况下可以看出，最终的逻辑方程(2)或(5)告诉我们如何确定它。

如果无法获得那种可以确定 c 的新经验，我们仍然可以通过赋予 c 其极限值 0 和 1，来确定 w 的概率的极限。这些极限是

$$\begin{aligned} \text{Minor limit of Prob. } w &= \tfrac{A}{V}. \\ \text{Superior limit} &= \tfrac{A+C}{V}. \end{aligned}$$

在这些极限之间，可以肯定，所求的概率必定落在其中，而不依赖于任何不与过去绝对矛盾的新经验。

如果事件 C 的表达式由许多成分构成，w 的逻辑值具有如下形式

$$w = A + \frac{0}{0}C_1 + \frac{0}{0}C_2 + \ \&\text{c.},$$

we can, instead of employing their aggregate as above, present the final solution in the form

$$\text{Prob. } w = \frac{A + c_1C_1 + c_2C_2 + \ \&\text{c.}}{V}.$$

Here c_1 = probability that if the event C_1 occur, the event w will occur, and so on for the others. Convenience must decide which form is to be preferred.

16. 以上是所提出问题的完整理论解。可以补充说，它同样适用于其原始陈述中提到的任何事件是有条件的情况。因此，如果数据之一是概率 p，即如果事件 x 发生，事件 y 将发生；事件 x 发生的概率未给出，我们必须假设 Prob.x = c(一个任意常数)，那么 Prob.xy = cp，这两个条件必须引入数据中，并按照先前的方法使用。再者，如果寻求确定如果事件 x 发生则事件 y 将发生的概率，解将采取以下形式

$$\text{Prob. sought } = \frac{\text{Prob. } xy}{\text{Prob. } x},$$

其分子和分母必须分别由前述一般方法确定。

17. 借助这些研究的结果，我们能够为概率问题的求解建立一条一般规则。

一般规则。

情形 I.--当所有事件都是无条件的。

构造其概率已被给出或所求的事件的记号表达式。

将那些与复合事件相关的表达式等同于一系列新的记号，s、t等，将这些记号视为表示事件，不再是复合的而是简单的，等同于它们所对应的表达式。

从如此形成的方程中消去所有逻辑记号，除了那些表示事件的记号，s、t等，其各自的概率p、q等是给定的，或者事件w其概率是所求的，并将w确定为s、t等的展开式函数，形式为

$$w = A + 0B + \frac{0}{0}C + \frac{1}{0}D.$$

设A + B + C = V，并设V s表示V中包含s作为因子的那些成分的总和，V t表示包含t作为因子的那些成分的总和，以此类推对于所有其概率给定的记号。

然后，从逻辑学过渡到代数学，建立方程

$$\frac{V_s}{p} = \frac{V_t}{q} = V, \tag{1}$$

$$\text{Prob. } w = \frac{A + cC}{V}, \tag{2}$$

从(1)确定s、t等作为p、q等的函数，并将它们的值代入(2)。结果将表达所需的解。或者形成对称方程组

$$\frac{V_s}{p} = \frac{V_t}{q} \cdots = \frac{A + cC}{u} = \frac{V}{1}, \tag{3}$$

where u represents the probability sought.

If c appear in the solution, its interpretation will be

$$c = \frac{\text{Prob. } Cw}{\text{Prob. } c},$$

而这种解释指示了其发现所需的经验的性质。

情形二--当部分事件带有条件限制时。

如果给定概率p，即如果事件X发生，则事件Y将发生，并且如果前件X的概率未给定，将命题分解为以下两个，即：

$$\begin{aligned} \text{Probability of } X &= c, \\ \text{Probability of } XY &= cp. \end{aligned}$$

如果所求的是概率，即如果事件W发生，则事件Z将发生，通过前一种情况分别确定分数的各项

$$\frac{\text{Prob. } WZ}{\text{Prob. } W},$$

而该分数本身将表示所求的概率。

在此情况下理解为X、Y、W、Z可以是任何复合事件。表达式XY和WZ表示X和Y以及W和Z的符号表达式的乘积，按照逻辑演算的规则形成。

单个常数c的确定在某些情况下可以根据方便分解为或替换为一系列任意常数c^1, c^2 ...的确定，如前所述。

18. 已经指出(I.12)，存在两个不同的定义或概念模式，概率论可以依赖于它们，其中一个与数更直接相关，另一个与逻辑更直接相关。我们现在已经考虑了从数值定义中产生的后果，并展示了它如何引导我们到达一个点，在那里与逻辑联系的必要性显然自我提示。我们已经在某种程度上看到了那种联系的性质；并且进一步，逻辑的独特过程和定量代数的更熟悉过程如何以相同的一般方法参与解决，每一个都如此完成自己的目标，以至于这两个过程可以被视为相互补充。现在剩下的是建立相反顺序的研究，并从概率的定义出发

其中逻辑关系更直接地涉及，以显示数值定义如何由此产生，以及同样的通用方法，同等依赖于两个元素，最终但通过不同的程序顺序，将如何被建立。

逻辑演算的符号表达式与代数的符号表达式之间存在着密切的类比，这是本论著过程中经常引起注意的事实。甚至可以说它们具有共同的形式，并且在相当程度上具有共同的规律。在后一方面只有一个例外，它们的区别仅在于解释。因此，同一个表达式根据我们赋予其中记号的具体意义，可以接受逻辑解释或定量解释。表达式 xy 在前一种情况下表示由 x 和 y 表示的事件的共同发生；在后一种情况下，表示由 x 和 y 表示的数或量的乘积。因此，每一个表示事件(简单的或复合的)的表达式，在另一种解释体系下，都接受纯粹定量的意义。于是这里产生了一个问题：是否存在任何过渡原则，根据它，同一符号表达式的逻辑解释和数值解释将具有可理解的关联。对于这个问题，以下考虑提供了一个答案。

19. 让我们承认存在一种称为期望的情感，这种情感的对象是事件的发生，并且允许有不同强度的程度。让我们也承认这种期望情感伴随着我们对事件产生所处环境的认识，并且它随着那种知识的程度和种类而变化。那么，在不假设或默示期望情感的强度(被视为一种心理情绪)允许精确的数值测量的情况下，探究一种数值估计模式的可能性是完全正当的，这种模式至少应满足以下条件，即：当已知的事件环境被认为证明更强的期望是合理时，它所赋予的数值应增加；当它们要求较弱的期望时，应减少；而当它们明显需要同等程度的期望时，应保持不变。

现在，如果我们假定期望的基本原理是这样的，即：将期望视为一个数值的元素，其表达式的规律应与将所期望的事件视为一个逻辑的元素，其表达式的规律相同，那么至少这些条件将得到满足。因此，如果 φ(x, y, z) 表示由事件 x、y、z 以任何方式复合而成的任一无条件事件，则根据上述原理，让同一表达式 φ(x, y, z) 表示该事件的期望；x、y、z 不再表示所涉及的简单事件，而是表示那些事件的期望。

因为，首先，显而易见的是，在此假说下，一组互斥事件中某个事件发生的概率将等于那些事件各自概率之和。因此，如果所述的交替

由n个互斥事件组成，其表达式为

$$\phi_1(x,y,z), \phi_2(x,y,z), \ldots \phi_n(x,y,z),$$

那种交替的表达将是

$$\phi_1(x,y,z) + \phi_2(x,y,z) \ldots + \phi_n(x,y,z) = 1;$$

文字记号x、y、z是逻辑的，并且涉及三个备选所由组成的简单事件：并且，根据假说，那些备选中某个将发生的概率的表达式是

$$\phi_1(x,y,z) + \phi_2(x,y,z) \ldots + \phi_n(x,y,z),$$

x、y、z在此表示上述简单事件的概率。现在这个表达式增加，在其他条件相同的情况下，随着所涉及的备选数量的增加而增加，随着其数量的减少而减少；这与所述条件相符。

此外，如果我们从上述概率测度的假说定义出发，我们将被引导，无论是通过必然推论还是通过逐步提示，这些提示或许可以称为必然的，到公认的数值定义。我们立即被引导认识到统一(1)作为确定性的适当数值测度。因为任何事件x或其反面1 – x将发生是确定的。这个命题的表达式是

$$x + (1 - x) = 1,$$

因此，根据假说，x +(1 – x)，上述命题的概率测度，成为确定性的测度。但该表达式的值是1，无论x的特定值可能是什么。因此，统一，或1，在所述假说下，是确定性的测度。

接下来，设有n个互斥但等可能的事件，我们将用t ^{1} , t ^{2} , ...t n表示。肯定这些中某个必须发生的命题将由方程表达

$$t_1 + t_2 \ldots + t_n = 1;$$

并且，当我们按照上一节的推理过渡到数值概率时，同样的方程在形式上仍然成立，并且由于概率t ^{1} , t ^{2} ...t n是相等的，我们有

$$nt_1 = 1,$$

由此 t l = ^{1} n ,并且类似地t2=^{1} n ,tn=^{1} n .假设它那么要求去确定部分序列 t ^{1} , t ^{2} ...t m 中某一事件将发生的概率，我们有所求的表达式

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 \ldots + t_m &= \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \ldots \qquad \text{to } m \text{ terms} \\ &= \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

因此，如果存在m个有利于特定事件交替发生的案例，从n个可能且等概率的案例中，该交替发生的概率将由分数$\frac{m}{n}$表达

现在，任何可能以不同的同等可能方式发生的事件，其发生实际上等同于一个择一的发生，即等同于一组备选者中某一个的发生。因此，任何事件发生的概率可以用一个分数表示，其分子表示有利于其发生的情况数目，分母表示同等可能的情况总数。但这正是概率测度的严格数值定义。因此，该定义包含在更为独特的逻辑的定义之中，我们一直试图追溯的正是后者的推论。

20. 由上述考察可以清楚看出：第一，无论我们从概率测度的通常数值定义出发，还是从这样一种定义出发--该定义赋予概率的数值测度这样一种取值法则，使得事件的逻辑表达式与其值的代数表达式之间建立起形式上的同一性--我们都将被引向同一套实际结果体系。第二，这两个定义中的任何一个，若被推究到其后果，并结合于它不可分割地卷入的那些关系来考察，都会通过推论或暗示把我们引向另一个定义。对于概率论的科学观点来说，至关重要的是这两个原则应当在其相互关联与依赖中一并加以考察。

第十八章

概率论中一般方法的初等例示

1. 此处旨在通过初等例子来说明上一章所论证的一般方法。所选的例子主要是那些因其简单性而允许对所得解答进行迅速验证的例子。但也会出现一些关于更高一类问题的提示，这些问题将在以后更充分地考虑，若没有一种独特的方法来确定其数据之间的必要条件，以使它们能够表示一种可能的经验，并指定最终解答的相应界限，那么对它们的分析将是不完整的。对该方法及其应用的更充分的考虑，留待下一章。

2. 例1.-某天打雷的概率是p，既打雷又下冰雹的概率是q，但关于打雷和下冰雹这两种现象的联系，不再假设知道其他任何信息。求在提议的那天下冰雹的概率。

令表示事件--打雷。

设表示事件--下冰雹。

Then xy will represent the event—It thunders and hails; and the data of the problem are

$$\text{Prob.}, x = p, \quad \text{Prob.}, xy = q.$$

There being here but one compound event xy involved, assume, according to the rule,

$$xy = u. \tag{1}$$

我们的数据于是变为

$$\text{Prob.}, x = p, \quad \text{Prob.}, u = q; \tag{2}$$

需要求 Prob ., y。现在(1)给出

$$y = \frac{u}{x} = ux + \frac{1}{0}u(1-x) + 0(1-u)x + \frac{0}{0}(1-u)(1-x).$$

因此(XVII.17)我们得到

$$V = ux + (1-u)x + (1-u)(1-x),$$
$$V_x = ux + (1-u)x = x, \quad V_u = ux;$$

以及一般规则的方程式，即，

$$\frac{V_x}{p} = \frac{V_u}{q} = V.$$
$$\text{Prob.}, y = \frac{A + cC}{V}$$

become, on substitution, and observing that $A = ux$, $C = (1-u)(1-x)$, and that V reduces to $x + (1-u)(1-x)$,

$$\frac{x}{p} = \frac{ux}{q} = x + (1-u)(1-x), \tag{3}$$
$$\text{Prob.}, y = \frac{ux + c(1-u)(1-x)}{x + (1-u)(1-x)}, \tag{4}$$

由此，通过消去x和u，我们容易推导出，

$$\text{Prob.}, y = q + c(l-p). \tag{5}$$

在这个结果中，c 表示未知概率：如果事件 (1–u)(1–x) 发生，则事件 y 将发生。现在 (1–u)(1–x) = (1–xy)(1–x) = 1–x，经实际乘法运算。因此 c 是未知概率：如果不打雷，就会下冰雹。因此，通解 (5) 可以解释如下：——下冰雹的概率等于打雷且下冰雹的概率 q，加上不打雷的概率 1–p 乘以如果它不打雷就会下冰雹的概率 c。而常识推理验证了这一结果。如果 c 不能数值地确定，我们通过赋予其极限值 0 和 1，得到 Prob. y 的以下极限，即：

下限 = q。

$$\text{Superior limit} = q + 1 - p.$$

3. **例2.** - 两个事件中一个或两个发生的概率是p，其中一个或两个失败的概率是q。这些中只有一个发生的概率是多少?让x和y表示各自的事件，那么数据是-

$$\text{Prob. } xy + x(1-y) + (1-x)y = p,$$
$$\text{Prob. } x(1-y) + (1-x)y + (1-x)(1-y) = q;$$

and we are to find

$$\text{Prob. } x(1-y)+y(1-x).$$

Here all the events concerned being compound, assume

$$\begin{gathered} xy+x(1-y)+(1-x)y=s, \\ x(1-y)+(1-x)y+(1-x)(1-y)=t, \\ x(1-y)+(1-x)y=w. \end{gathered}$$

然后消去x和y，并将w确定为s和t的展开式函数，我们发现

$$w=st+0s(1-t)+0(1-s)t+\frac{1}{0}(1-s)(1-t).$$

Hence $A=st, C=0, V=st+s(1-t)+(1-s)t=s+(1-s)t, V_s=s, V_t=t$; and the equations of the General Rule (XVII. 17) become

$$\frac{s}{p}=\frac{t}{q}=s+(1-s)t, \tag{1}$$

$$\text{Prob. } w=\frac{st}{s+(1-s)t};$$

由此消去s与t，我们得到，

$$\text{Prob. } w=p+q-1.$$

因此，p + q – 1 就是所求概率的度量。这一结果可以如下验证：--由于 p 是给定事件中一个或两个发生的概率，1 – p 将是它们都失败的概率；又由于 q 是一个或两个失败的概率，1 – q 是它们都发生的概率。因此 1 – p + 1 – q，或 2 – p – q，是它们要么都发生要么都失败的概率。但唯一剩下的可能替代情况是事件中仅有一个发生。因此这种情况发生的概率是 1 –(2 – p – q)，或 p + q – 1，如上所述。4. 例3。--证人 A 说真话的概率是 p，另一证人 B 说真话的概率是 q，他们在陈述中不一致的概率是 r。如果他们一致，其陈述为真的概率是多少?

设 x 表示 A 说真话的假说；y 表示 B 说真话；那么 A 和 B 在陈述中不一致的假说将由 x(1 – y) + y(1 – x) 表示；他们在陈述中一致的假说由 xy +(1 – x)(1 – y) 表示，他们在真理上一致的假说由 xy 表示。因此我们有以下数据：

$$\text{Prob. } x=p, \quad \text{Prob. } y=q, \quad \text{Prob. } x(1-y)+y(1-x)=r,$$

我们要由此确定

$$\frac{\text{Prob. } xy}{\text{Prob. } xy+(1-x)(1-y)}.$$

But as Prob. $x(1-y)+y(1-x)=r$, it is evident that Prob. $xy+(1-x)(1-y)$ will be $1-r$; we have therefore to seek

$$\frac{\text{Prob. } xy}{1-r}.$$

现在所涉及的复合事件在表达式中是x(1 – y) + y(1 – x)和xy，让我们假设

$$\left.\begin{aligned} x(1-y)+y(1-x) &= s \\ xy &= w \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

那么我们的数据是Prob.x = p,Prob.y = q,Prob.s = r，我们要找Prob.w。

该系统(1)经化简后给出，

$$\{x(1-y)+y(1-x)\}(1-s)+s\{xy+(1-x)(1-y)\} + xy(1-w)+w(1-xy)=0;$$

由此

$$\begin{aligned} w &= \frac{x(1-y)(1-s)+y(1-x)(1-s)+sxy+s(1-x)(1-y)+xy}{2xy-1} \\ &= \frac{1}{0}xys+xy(1-s)+0x(1-y)s+\frac{1}{0}x(1-y)(1-s) \\ &\quad +0(1-x)ys+\frac{1}{0}(1-x)(1-y)s+\frac{1}{0}(1-x)y(1-s) \\ &\quad +0(1-x)(1-y)(1-s). \end{aligned} \tag{2}$$

在这一展开式中，系数[1]

0 有被使得去替换

每一个等价形式(X.6)。这里我们有

$$V=xy(1-s)+x(1-y)s+(1-x)ys+(1-x)(1-y)(1-s);$$

由此，从逻辑学过渡到代数学，

$$\begin{aligned} \frac{xy(1-s)+x(1-y)s}{p} &= \frac{xy(1-s)+(1-x)ys}{q} \\ &= \frac{x(1-y)s+(1-x)ys}{r} \\ = xy(1-s)+x(1-y)s+(1-x)ys+(1-x)(1-y)(1-s). & \end{aligned}$$

$$\text{Prob. } w=\frac{xy(1-s)}{xy(1-s)+x(1-y)s+(1-x)ys+(1-x)(1-y)(1-s)},$$

由此我们容易推得

$$\text{Prob. } w=\frac{p+q-r}{2};$$

由此我们得到

$$\frac{\text{Prob. } xy}{1-r} = \frac{p+q-r}{2(1-r)} \tag{3}$$

以求所需之值。

如果以同样的方式我们寻求概率，即如果A和B在他们的陈述中一致，那个陈述将是假的，我们必须用以下替换系统(1)的第二个方程，即：

$$(1-x)(1-y) = w;$$

那么最终的逻辑方程将是

$$\begin{aligned} w = \frac{1}{0}xys + 0xy(1-s) + 0x(1-y)s + \frac{1}{0}x(1-y)(1-s) \\ +0(1-x)ys + \frac{1}{0}(1-x)y(1-s) + \frac{1}{0}(1-x)(1-y)s \\ +(1-x)(1-y)(1-s); \end{aligned} \tag{4}$$

由此，按照先前的方法继续推演，我们最终推导出

$$\text{Prob. } w = \frac{2-p-q-r}{2}. \tag{5}$$

因此我们有

$$\frac{\text{Prob. } (1-x)(1-y)}{1-r} = \frac{2-p-g-r}{2(1-r)} \tag{6}$$

for the value here sought.

这些结果是相互一致的。因为既然A和B的联合陈述必须是真或假是确定的，(3)和(5)的第二项通过相加应该等于1。现在我们有恒等式，

$$\frac{p+q-r}{2(1-r)} + \frac{2-p-q-r}{2(1-r)} = 1.$$

从结果(5)和(6)的简单性来看，很可能它们可以容易地通过应用已知原理推导出来；但值得注意的是，它们并不直接属于已知方法的范围。数据的数量超过了它们所涉及的简单事件的数量。库尔诺先生在其实力非凡的著作《概率理论阐述》中提出，在上述情况下，从原始前提中选择不同的数据集，每组数据在数量上等于它们所涉及的简单事件，假设那些简单事件是独立的，分别从各自的数据集确定其概率，并比较由此为同一元素找到的不同值，判断独立性假设在多大程度上是合理的。这种方法只有在上述简单事件根据上述标准被证明是近乎或完全独立时才能接近正确；而在证词和判断的问题中，这种假说

被采用，它似乎令人怀疑是否被人类行为方式的实际经验所证明。

5. 例4.-从一段普遍疾病期间所作的观察，在特定区域随机选取的任何房屋被热病访问的概率是p，被霍乱访问的概率是q，并且逃脱两种疾病，并且在清洁和通风方面不处于有缺陷的卫生条件的概率是r。随机选取的任何房屋处于有缺陷的卫生条件的概率是多少？

关于任何房屋，让我们采用记号 x, y, z， 如下，即：

符号x表示对热病的探访。

霍乱。卫生条件不良。

那么，其概率已给出的事件由 x、y 和 (1 – x)(1 – y)(1 – z) 表示，其概率被寻求的事件是 z。那么假设，

$$(1-x)(1-y)(1-z) = w;$$

那么我们的数据是，

$$\text{Prob. } x = p, \quad \text{Prob. } y = q, \quad \text{Prob. } w = r,$$

而我们要去求 Prob.z。现在

$$\begin{aligned} z = \frac{(1-x)(1-y)-w}{(1-x)(1-y)} \\ = \frac{1}{0}xyw + \frac{0}{0}xy(1-w) + \frac{1}{0}x(1-y) + \frac{0}{0}x(1-y)(1-w) \\ + \frac{1}{0}(1-x)yw + \frac{0}{0}(1-x)y(1-w) + 0(1-x)(1-y)w \\ + (1-x)(1-y)(1-w). \quad (1) \end{aligned}$$

The value of V deduced from the above is

$$V = xy(1-w) + x(1-y)(1-w) + (1-x)y(1-w)$$
$$+(1-x)(1-y)w + (1-x)(1-y)(1-w) = 1 - w + w(1-x)(1-y);$$

and similarly reducing V_x, V_y, V_w, we get

$$V_x = x(1-w), \quad V_y = y(1-w), \quad V_w = w(1-x)(1-y);$$

furnishing the algebraic equations

$$\frac{x(1-w)}{p} = \frac{y(1-w)}{q} = \frac{w(1-x)(1-y)}{r} = 1 - w + w(1-x)(1-y). \quad (2)$$

关于展开式中由系数$\frac{0}{0}$表征的那些项，为求变化(xvii.18)，我将不把它们归并为单一的一-项，而是以如下形式呈现它们：

$$\frac{0}{0}x(1-w) + \frac{0}{0}(1-x)y(1-w); \quad (3)$$

那么 Prob.z 的值将是

$$\text{Prob. } z = \frac{(1-x)(1-y)(1-w) + cx(1-w) + c'(1-x)y(1w)}{1-w+w(1-x)(1-y)}. \qquad (4)$$

从(2)和(4)我们推得

$$\text{Prob. } z = \frac{(1-p-r)(1-q-r)}{1-r} + cp + c'\frac{q(1-p-r)}{1-r},$$

as the expression of the probability required. If in this result we make $c = 0$, and $c' = 0$, we find for an inferior limit of its value $\frac{(1-p-r)(1-q-r)}{1-r}$; and if we make $c = 1$, $c' = 1$, we obtain for its superior limit $1 - r$.

6. 从对这一解答的检查可以看出，所选的前提极为不完善。常数 c 和 c′表明了这一点，而最终逻辑方程的相应项(3)则表明这种缺陷应如何弥补。因此，由于

$$x(1-w) = x\{1-(1-x)(1-y)(1-z)\} = x,$$
$$(1-x)y(1-w) = (1-x)y\{1-(1-x)(1-y)(1-z)\} = (1-x)y,$$

我们得知 c 是若任何房屋曾遭热病侵袭则其卫生状况不良的概率，而 c′是若任何房屋曾遭不伴热病的霍乱侵袭则其卫生状况不良的概率。

如果逻辑展开式中受系数00影响的各项按照一般规则的直接陈述方式收集在一起，则最终解答将采取以下形式：

$$\text{Prob. } z = \frac{(1-p-r)(1-q-r)}{1-r} + c\left(p+q-\frac{pq}{1-r}\right)$$

此处 c 表示若某房屋曾遭上述疾病之一或两者侵袭则其卫生状况不良的概率。这一结果与前一结果完全一致，而且事实上，在此类情形下所给出的不同解答形式之间的必然等价性可以形式地建立。

上述解答可在特例中验证。于是，取第二种形式，若 c = 1，我们得到 Prob.z = 1 – r，这是一个正确的结果。因为如果任一热病或霍乱必然表明卫生状况有缺陷，那么任何房屋处于有缺陷卫生状态的概率就简单地等于它未被发现于由 z 所表示的那一范畴中的概率，根据数据，该概率为 1 – r。也许上述解答的一般验证会是困难的。

上述解答中的常数 p、q 和 r 受以下条件约束

$$p + r \overset{=}{<} 1, \quad q + r \overset{=}{<} 1.$$

7. 例5--已知假言三段论各前提的概率，求结论的概率。

设三段论以其赤裸形式如下：
大前提：若命题 Y 为真，则 X 为真。小前提：若命题 Z 为真，
则 Y 为真。结论：若命题 Z 为真，则 X 为真。

设大前提的概率为 p，小前提的概率为 q。

于是数据如下，以 x 表示命题 X，等等，并假定 c 和 c′为任意常数：

$$\begin{aligned} &\text{Prob. } y = c, && \text{Prob. } xy = cp;\\ &\text{Prob. } z = c', && \text{Prob. } yz = c'q; \end{aligned}$$

我们要从中确定，

$$\frac{\text{Prob. } xz}{\text{Prob. } z} \text{ or } \frac{\text{Prob. } xz}{c'}.$$

让我们假设，

$$xy = u, \quad yz = v, \quad xz = w,$$

然后，按照通常的方法，将 w 确定为 y、z、w 和 v 的展开函数，这些记号对应于其概率已给出的命题，我们求得

$$\begin{aligned} w = {} & uzvy + 0u(1-z)(1-v)y + 0(1-u)zvy \\ & + \frac{0}{0}(1-u)z(1-v)(1-y) + 0(1-u)(1-z)(1-v)y \\ & + 0(1-u)(1-z)(1-v)(1-y) + \text{ terms whose coefficients are } \frac{1}{0}; \end{aligned}$$

而从逻辑过渡到代数，

$$\begin{aligned} \frac{uzvy + u(1-z)(1-v)y}{cp} &= \frac{uzvy + (1-u)zvy + (1-u)z(1-v)(1-y)}{c'} \\ &= \frac{uzvy + (1-u)zvy}{c'q} \\ = \frac{uzvy + u(1-z)(1-v)y + (1-u)zvy + (1-u)(1-z)(1-v)y}{c} &= V. \end{aligned}$$

$$\text{Prob. } w = \frac{uzvy + a(1-u)z(1-v)(1-y)}{V},$$

其中

$$\begin{aligned} V = {} & uzvy + u(1-z)(1-v)y + (1-u)zvy + (1-u)z(1-v)(1-y) \\ & + (1-u)(1-z)(1-v)y + (1-u)(1-z)(1-v)(1-y), \end{aligned}$$

该方程组的解给出

$$\text{Prob. } w = c'pq + ac'(1-q),$$

由此

$$\frac{\text{Prob. } xy}{c'} = pq + a(1-q),$$

所需的值。在此表达式中，任意常数 a 是若命题 Z 为真而 Y 为假则 X 为真的概率。换言之，它是若小前提为假则结论为真的概率。

本探究若假定命题 Z 为真，然后求 X 的概率，本可大大简化。数据将简单地是

$$\text{Prob. } y = q, \quad \text{Prob. } xy = pq;$$

由此我们本应求得 Prob.x = pq + a(1 – q)。显然，在这种情况下，这种程序方式本会是允许的，但我更愿意通过该方法直接而无条件的应用来推出解答。这一结果是一般推理所验证的，而且确实不需要微积分来获得。一般方法在被应用于最不需要其帮助的情形时，往往显得最为累赘。

请注意，上述方法同样适用于直言三段论，而且不仅适用于三段论，还适用于每一种演绎推理形式。给定分别附着于任何论证序列的前提的概率；通过上述方法，总是可以确定从这些前提合法地得出的结论为真的后承概率。无需提醒读者，结论的真与结论的正确是不同的事情。

8. 在此类应用中出现的有一值得特别注意的显著情形。这就是：当为真时等价的命题，在仅被视为或然时并不必然等价。这一原理将在下例中说明。

例6--已知析取命题“或者命题 Y 为真，或者命题 X 和 Y 两者皆假”的概率为 p，求条件命题“若命题 X 为真，则 Y 为真”的概率。

Let x and y be appropriated to the propositions X and Y respectively. Then we have

$$\text{Prob. } y + (1-x)(1-y) = p,$$

from which it is required to find the value of $\frac{\text{Prob. } xy}{\text{Prob. } x}$.

$$\text{Assume} y + (1-x)(1-y) = t. \tag{1}$$

消去 y 得 Eliminating y we get

$$(1-x)(1-t) = 0.$$

由此

$$x = \frac{0}{0}t + 1 - t;$$

并按照通常方式进行，

$$\text{Prob. } x = 1 - p + cp. \tag{2}$$

Where c is the probability that if either Y is true, or X and Y false, X is true. Next to find Prob. xy. Assume

$$xy = w. \tag{3}$$

从(1)和(3)中消去y，我们得到

$$z(1 - t) = 0;$$

由此，按上述方法进行，

$$\text{Prob. } z = cp,$$

c 具有与之前相同的解释。因此

$$\frac{\text{Prob. } xy}{\text{Prob. } x} = \frac{cp}{1 - p + cp},$$

对于给定的条件命题为真的概率。

然而，在纯逻辑科学中，就其本身而言，它只与真和假打交道，上述析取命题和条件命题是等价的。它们同真且同假。然而，从上述探究可以看出，当析取命题具有概率 p 时，条件命题具有一个不同的且部分不确定的概率

~~cp~~ $\frac{1}{}$ ~~p~~ + cp ·然而这些表达式是这样的：当它们中的任一个变为 *1*或*0*时，另一个取相同的值。因此，结果完全一致，而逻辑变换有助于验证从概率论推出的公式。

读者通过类似的分析将容易证明，若条件命题的概率给定为 p，则析取命题的概率将为 1 – c + cp，其中 c 是命题 X 为真的任意概率。

9. 例7--要求确定事件 x 的概率，已知下列数据中的第一项，或第一项和第二项，或第一项、第二项和第三项，即：

1. 事件 x 发生，或在三个事件 x、y、z 中唯独它不发生的概率为 p。2. 事件 y 发生，或在三个事件 x、y、z 中唯独它不发生的概率为 q。3. 事件 z 发生，或在三个事件 x、y、z 中唯独它不发生的概率为 r。

第一种情形的解。

这里我们假设只给出上述数据中的第一个。我们有
那么，

$$\text{Prob. } \{x + (1-x)yz\} = p,$$

求 Prob.x,

$$\text{Let} x + \big(1-x\big)yz = s,$$

then eliminating yz as a single symbol, we get,

$$x\big(1-s\big) = 0.$$

Hence

$$x = \frac{0}{1-s} = \frac{0}{0}s + 0\big(1-s\big),$$

whence, proceeding according to the rule, we have

$$\text{Prob. } x = cp, \tag{1}$$

其中 c 是若 x 发生，或单独不发生，则两个备选者中的前者将会发生的概率。解答的界限显然是 0 和 p。

这一解答似乎除了未受助的良好常识本会传达的内容之外，并未给我们任何信息。然而，它只是此处所假定的单一数据真正使我们有理由推断的全部内容。在下一解答中我们将看到，对数据的增加如何将最终解答限制在更窄的界限内。

第二种情形的解。

这里我们以这些方程作为我们的数据

$$\text{Prob. } \{x + \big(1-x\big)yz\} = p,$$
$$\text{Prob. } \{y + \big(1-y\big)xz\} = q.$$

让我们写

$$x + \big(1-x\big)yz = s,$$
$$y + \big(1-y\big)xz = q,$$

from the first of which we have, by (VIII. 7),

$$\{x + \big(1-x\big)yz\}\big(1-s\big) + s\{1 - x - \big(1-x\big)yz\} = 0,$$
$$\text{or} \big(x + \bar{x}yz\big)\bar{s} + s\bar{x}\big(1-yz\big) = 0;$$

provided that for simplicity we write $\bar{x}$ for $1-x$, $\bar{y}$ for $1-y$, and so on. Now, writing for $1-yz$ its value in constituents, we have

$$\big(x + \bar{x}yz\big)\bar{s} + s\bar{x}\big(y\bar{z} + \bar{y}z + \bar{y}\bar{z}\big) = 0,$$

an equation consisting solely of positive terms. In like manner we have from the second equation,

$$(y + \bar{y}xz)\bar{t} + t\bar{y}(x\bar{z} + \bar{x}z + \bar{x}\bar{z}) = 0;$$

并且从这两个方程之和中我们要消去 y 和 z。

若在该和中令 y = 1,z = 1，我们得到结果 s + ¯t。若在同一和中令 y = 1,z = 0，我们得到结果

$$x\bar{s} + s\bar{x} + \bar{t}.$$

若在同一和式中令 y = 0,z = 1，则得到

$$x\bar{s} + s\bar{x} + x\bar{t} + t\bar{x}.$$

最后，如果在同一和式中令 y = 0、z = 0，则得到

$$x\bar{s} + s\bar{x} + tx + t\bar{x}, \text{ or } x\bar{s} + s\bar{x} + t.$$

这四个表达式要相乘。现在第一和第三可以按以下方式相乘：

$$\begin{aligned}&(\bar{s} + \bar{t})(x\bar{s} + s\bar{x} + x\bar{t} + t\bar{x})\\ &= x\bar{s} + x\bar{t} + (\bar{s} + \bar{t})(s\bar{x} + t\bar{x}) \text{ by (IX. Prop. II.)}\\ &= x\bar{s} + x\bar{t} + \bar{s}\bar{x}t + s\bar{x}\bar{t}. \qquad (2)\end{aligned}$$

又，第二式和第四式由(IX.命题 i.)给出

$$\begin{aligned}&(x\bar{s} + s\bar{x} + \bar{t})(x\bar{s} + s\bar{x} + t)\\ &= x\bar{s} + s\bar{x}. \qquad (3)\end{aligned}$$

最后，将(2)与(3)相乘得到

$$\begin{aligned}&(x\bar{s} + s\bar{x})(x\bar{s} + s\bar{x}\bar{t} + x\bar{t} + t\bar{x}\bar{s})\\ &= x\bar{s} + s\bar{x}(s\bar{x}\bar{t} + x\bar{t} + t\bar{x}\bar{s})\\ &= x\bar{s} + s\bar{x}\bar{t}.\end{aligned}$$

由此得到最终方程

$$(1 - s)x + s(1 - t)(1 - x) = 0,$$

将其关于 x 求解，得出

$$\begin{aligned}x &= \frac{s(1-t)}{s(1-t) - (1-s)}\\ &= \frac{0}{0}st + s(1-t) + 0(1-s)t + 0(1-s)(1-t),\end{aligned}$$

并且，按照这一规则进行下去，我们最终得到，

$$\text{Prob. } x = p(1-q) + cpq. \qquad (4)$$

其中 c 是若事件 st 发生则 x 将发生的概率。现在，若我们将 s 和 t 的表达式相乘，形成 st 的展开表达式，我们求得--

c = 概率：若 x 和 y 一起发生，或 x 和 z 一起发生而 y 不发生，或 y 和 z 一起发生而 x 不发生，则事件 x 将发生。

概率 x 的界限显然是 p(1 – q) 和 p。这一解答比前一解答更为确定，因为它包含一个不受任意常数影响的项。

第三种情形的解。

Here the data are—
$$\begin{aligned}&\text{Prob. } \{x + (1-x)yz\} = p,\\ &\text{Prob. } \{y + (1-y)xz\} = q,\\ &\text{Prob. } \{z + (1-z)xy\} = r.\end{aligned}$$
Let us, as before, write $\bar{x}$ for $1 - x$, &c., and assume

$$\begin{aligned}x + \bar{x}yz &= s,\\ y + \bar{y}xz &= t,\\ z + \bar{z}xy &= u.\end{aligned}$$

通过(VIII.8)的约化，我们得到方程

$$\begin{aligned}&(x + \bar{x}yz)\bar{s} + s\bar{x}(y\bar{z} + \bar{y}z + \bar{y}\bar{z})\\ &+ (y + \bar{y}xz)\bar{t} + t\bar{y}(z\bar{x} + x\bar{z} + \bar{x}\bar{z})\\ &+ (z + \bar{z}xy)\bar{u} + u\bar{z}(x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}) = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

现在，与其直接从上述方程中消去 y 和 z，不如按照(IX.命题 iii.)假定该消元的结果为

$$Ex + E'(1-x) = 0,$$

那么 E 将通过在该给定方程中令 x = 1，并从所得方程中消去 y 和 z 而求得，而 E ′将通过在该给定方程中令 x = 0，并从结果中消去 y 和 z 而求得。首先，令 x = 1，我们有

$$\bar{s} + (y + \bar{y}z)\bar{t} + t\bar{y}\bar{z} + (z + y\bar{z})\bar{u} + u\bar{y}\bar{z} = 0,$$

并在此方程第一项中依次令y=1，z=1，y=1，z=0等，将结果相乘，得表达式

$$(\bar{s} + \bar{t} + \bar{u})(\bar{s} + \bar{t} + \bar{u})(\bar{s} + \bar{t} + \bar{u})(\bar{s} + t + u),$$

这等价于

$$(\bar{s} + \bar{t} + \bar{u})(\bar{s} + t + u).$$

这是 E 的表达式。我们将保留其现有形式。已经通过例子(VIII.3)表明，这种表达式通过乘法的实际化简虽然方便，但并非必要。

又在(5)中，令x = 0，我们得到

$$yz\bar{s} + s(y\bar{z} + \bar{y}z + \bar{y}\bar{z}) + y\bar{t} + t\bar{y} + z\bar{u} + u\bar{z} = 0;$$

由此，通过同样的消元过程，我们为 E ′找到表达式

$$(\bar{s} + \bar{t} + \bar{u})(s + \bar{t} + u)(s + t + \bar{u})(s + t + u).$$

因此，从(5)中消去 y 和 z 的最终结果是

$$(\bar{s} + \bar{t} + \bar{u})(\bar{s} + t + u)x + (\bar{s} + \bar{t} + \bar{u})(s + \bar{t} + u)(s + t + \bar{u})(s + t + u)(1 - x) = 0.$$

Whence we have

$$x = \frac{(\bar{s} + \bar{t} + \bar{u})(s + \bar{t} + u)(s + t + \bar{u})(s + t + u)}{(\bar{s} + \bar{t} + \bar{u})(s + \bar{t} + u)(s + t + \bar{u})(s + t + u) - (\bar{s} + \bar{t} + \bar{u})(\bar{s} + t + u)};$$

or, developing the second member,

$$\begin{aligned} x = {} & \frac{0}{0}stu + \frac{1}{0}s\bar{t}u + \frac{1}{0}st\bar{u} + s\bar{t}\bar{u} \\ & + \frac{1}{0}\bar{s}tu + 0\bar{s}\bar{t}u + 0\bar{s}t\bar{u} + 0\bar{s}\bar{t}\bar{u}. \end{aligned} \tag{6}$$

因此，从逻辑过渡到代数，

$$\begin{aligned} \frac{stu + s\bar{t}\bar{u}}{p} = \frac{stu + \bar{s}t\bar{u}}{q} = \frac{stu + \bar{s}\bar{t}u}{r} \\ = stu + s\bar{t}\bar{u} + \bar{s}\bar{t}u + \bar{s}t\bar{u} + \bar{s}\bar{t}\bar{u}. \end{aligned} \tag{7}$$

$$\text{Prob. } x = \frac{s\bar{t}\bar{u} + cstu}{stu + s\bar{t}\bar{u} + \bar{s}\bar{t}u + \bar{s}t\bar{u} + \bar{s}\bar{t}\bar{u}}, \tag{8}$$

To simplify this system of equations, change $\frac{s}{\bar{s}}$ into s, $\frac{t}{\bar{t}}$ into t, &c., and after the change let λ stand for $stu + s + t + 1$. We then have

$$\text{Prob. } x = \frac{s + cstu}{\lambda}, \tag{9}$$

与这些关系

$$\frac{stu + s}{p} = \frac{stu + t}{q} = \frac{stu + u}{r} = stu + s + t + u + 1 = \lambda. \tag{10}$$

由这些方程我们得到

$$\begin{aligned} stu + s &= \lambda p, \\ stu + s &= \lambda - t - u - 1, \\ \therefore \lambda p &= \lambda - u - t - 1. \\ u + t &= \lambda(1 - p) - 1. \\ \text{Similarly,} u + s &= \lambda(1 - q) - 1, \\ \text{and} s + t &= \lambda(1 - r) - 1. \end{aligned} \tag{11}$$

由哪些方程我们求得

$$s = \frac{\lambda(1+p-q-r)-1}{2}, \quad t = \frac{\lambda(1+q-r-p)-1}{2},$$
$$u = \frac{\lambda(1+r-p-q)-1}{2}. \tag{12}$$

Now, by (10),

$$stu = \lambda p - s.$$

Substitute in this equation the values of s, t, and u above determined, and we have

$$\{(1+p-q-r)\lambda-1\}\{(1+q-p-r)\lambda-1\}\{(1+r-p-q)\lambda-1\}$$
$$= 4\{(p+q+r-1)\lambda+1\}, \tag{13}$$

一个确定 λ 的方程。然后 s、t 和 u 的值由下式给出
(12) ，将它们代入(9)即完成问题的求解。
10. 现在出现了一个困难，将其突出地呈现在读者面前一直是本次研究的目的之一。应当如何确定，上述方程的哪一个根应被取作 λ 的值。在本章开头已对这个困难有所提及，并暗示更充分的考虑留待下一章；以下结果即取自该章。

为了使问题的数据能够来自可能的经验，量 p、q 和 r 必须满足以下条件：

$$1+p-q-r \overset{=}{>} 0,$$
$$1+q-p-r \overset{=}{>} 0, \tag{14}$$
$$1+r-p-q \overset{=}{>} 0.$$

此外，在一般解中所使用的 λ 的值必须满足以下条件：

$$\lambda \overset{=}{>} \frac{1}{1+p-q-r}, \quad \lambda \overset{=}{>} \frac{1}{1+q-p-r}, \quad \lambda \overset{=}{>} \frac{1}{1+r-p-q}. \tag{15}$$

现在这两组条件足以限制一般解。可以证明，中心方程(13)只提供一个满足这些条件的 λ 值，而那个 λ 的值就是所需要的。

设 1 + p – q – r 为上面给出的 λ 的三个系数中最小的一个，则

1

1 + p – q – r 将是那些值中的最大者，在其上我们要证明只存在一个 λ 的值。让我们把(13)写成如下形式

$$\{(1+p-q-r)\lambda-1\}\{(1+q-p-r)\lambda-1\}\{(1+r-p-q)\lambda-1\}$$
$$-4\{(p+q+r-1)\lambda+1\} = 0; \tag{16}$$

and represent the first member by V.

Assume $\lambda = \dfrac{1}{1+p-q-r}$, then V becomes

$$-4\left(\frac{p+q+r-1}{1+p-q-r}+1\right) = -4\left(\frac{2p}{1+p-q-r}\right),$$

这是负的。令 λ = ∞，则 V 是正的且无限的。

再次，

$$\frac{d^2V}{d\lambda^2} = (1+p-q-r)(1+q-p-r)\{(1+r-p-q)\lambda - 1\}$$
$$+ \text{ similar positive terms,}$$

该表达式在极限 λ = $^{11+}$ p – q – r 与λ=∞之间为正。 ———

那么，如果我们构造一条曲线，其横坐标由 λ 度量，纵坐标由 V 度量，该曲线将在指定极限之间从横坐标 λ 的下方穿到上方，其凸性始终向下。因此它将在那些极限内只与横坐标 λ 相交一次；因此方程(16)将只有一个与之对应的根。

因此，解由(9)表示，其中 λ 是(13)中满足条件(15)的那个根，而 s, t 和 u 由(12)给出。c 的解释可以按通常方式推出。

从上述可以看出，该问题在所有情况下都或多或少是不确定的。

第十九章

论统计条件。

1. 所谓统计条件，我指的是那些必须联结一个问题的数值数据、以使这些数据彼此一致、因而成为统计观察实际上可能提供的那些条件。这种条件的确定构成一个重要问题，我打算在本章中承担其解答，至少达到足以满足本著作要求的程度，我部分地把它视为一个独立的思辨对象，但部分地也把它视为对前面已在一定程度上例示的概率论的必要补充。这两个主题之间联系的性质可以陈述如下：

2. 有无数实例，上一章例7中就出现了这类实例之一，其中概率论中一个问题的解答最终依赖于一个高次代数方程的解答。在此类情形中，正确根的选择必须由某些条件来确定，这些条件部分涉及数据中所指定的数值，部分涉及所需元素的正当限制。这种条件的发现有时可以借助未经辅助的推理来实现。例如，若有一事件 A 发生的概率 p，以及所述事件 A 与另一事件 B 同时发生的概率 q，则显然我们必须有=

$$p > q.$$

但对于此类关系的一般确定，需要一种独特的方法，我们现在着手建立它。

作为从实际经验中得出的，任何事件的概率都是近似过程的结果。它是观察到事件发生的次数与观察记录的所有同等可能情况的总数之比的极限--随着观察次数的增加，我们越来越接近这个极限。现在让符号 n，前缀于任何类的表达式，表示包含在该类中的个体数目。

因此，x 表示人，y 表示白色存在物，让我们假设

$$\begin{array}{lll} nx & = & \text{男人数。} \\ nxy & = & \text{白人的人数。} \\ nx(1-y) & = & \text{不是白人的男子数目；依此类推。} \end{array}$$

按照这种记号，n(1) 将表示论域中所包含的个体数目，而$^{n(x)}_{n\,(1)}$将表示从由 n(1)所表示的那个存在论域中选出的任何存在个体是男人的概率。如果观察没有使我们得知 n(x) 和 n(1) 的总值，那么所讨论的概率就是$^{n(x)}$所趋向的极限

$$\overline{n(1)}$$

随着个别观察次数的增加而趋近。

同样地，如果像本章中一般所假设的那样，x 表示所观察到的一类特定事件，那么 n(x) 将表示该事件发生的次数，n(1) 表示所观察到的各类事件(等概率的)的数目，而$^{n(x)}_{n\,(1)}$,或其极限，即该事件发生的概率

$$\overline{\underline{x}}.$$

因此很明显，任何关于量 n(x)、n(y)、n(1) 等的比的结论，都可以转换为关于由 x、y 等表示的事件的概率的结论。因此，如果我们发现如下关系，即，

$$n(x) + n(y) < n(1),$$

表达事件 x 发生的次数与事件 y 发生的次数之和小于可能发生的次数 n(1)，我们可以由此推出关系，

$$\frac{n(x)}{n(1)} + \frac{n(y)}{n(1)} < 1,$$
$$\text{orProb. } x + \text{Prob. } y < 1.$$

一般来说，任何上述统计关系都将通过将 n(1) 变为 1 ，以及将任何其他符号 n(x) 变为 *Prob.*来转换为连接相关事件概率的关系。

3. 首先，我们将研究一种确定类或事件的数值关系的方法，特别是数值的主要和次要极限。其次，我们将把该方法应用于概率论中问题解的限制。

显然，符号 n 在其运算中是分配性的。因此我们有

$$n\{xy + (1-x)(1-y)\} = nxy + n(1-x)(1-y)$$
$$nx(1-y) = nx - nxy,$$

等等。任何可分解为不同组或部分的类中所包含的事物的数目，等于在这些组中找到的事物的数目之和。

分离的部分。此外，显然，任何由逻辑记号 x、y 等构成的表达式，都可以按照与记号规律相容的任何方式展开或扩充，并将记号 n 施用于结果的每一项，只要把可能出现的任何常数乘数放在记号 n 之外；这不会影响结果的值。表达式 n(1) 如果出现，当然将表示论域中所包含的个体数目。于是，

$$\begin{aligned} n(1-x)(1-y) &= n(1-x-y+xy) \\ &= n(1)-n(x)-n(y)+n(xy). \\ \text{Again,} n\{xy+(1-x)(1-y)\} &= n(l-x-y+2xy) \\ &= n(1)-nx-ny+2nxy). \end{aligned}$$

在最后一个成员中，项 2 nxy 表示两倍包含在类 xy 中的个体数目。

4. 我们现在继续研究其逻辑表达式已给出的类的数值极限。在这项研究中，以下原则具有根本重要性：

第一。如果给定类的所有成员都具有某种性质 x，则包含在类 x 中的个体总数将是包含在给定类中的个体数目的一个上极限。

第二。任何类 y 中个体数目的一个下极限，将通过从论域中包含的个体数目中减去相反类 1 – y 的一个上数值极限来找到。

为了例证这些原则，让我们将它们应用于以下问题：问题。--给定 n(1)、n(x) 和 n(y)，求 nxy 的上极限和下极限。

这里我们的数据是论域中所包含的个体数目、类x中所包含的数目以及类y中的数目，要求确定由同时出现在类x和类y中的个体所构成的类中所包含的数目的界限。

根据原理i，这个数目不能超过类x中所包含的数目，也不能超过类y中所包含的数目。因此它的上界将是两个值n(x)和(y)中较小的那个。

根据原理ii，类xy的下界将由以下表达式给出

$$n(l)- \text{ major limit of } \{x(l-y)+y(l-x)+(1-x)(1-y)\}, \qquad (1)$$

since $x(1-y)+y(1-x)-(1-x)(1-y)$ is the complement of the class xy, i.e. what it wants to make up the universe.

Now $x(1-y)+(1-x)(1-y)=1-y$. We have therefore for (1),

$$\begin{aligned} & n(1)- \text{ major limit of } \{1-y+y1-x)\} \\ = & \, n(1)-n(l-y)- \text{ major limit of } y(1-x). \end{aligned}$$

y(l – x)的上界是两个值n(y)和n(1 – x)中较小的那个。设n(y)为较小者，则(2)变为

$$\begin{aligned} & n(1) - n(1-y) - n(y) \\ = & n(1) - n(1) + n(y) - n(y) = 0. \end{aligned}$$

其次，设n(1 – x)小于n(y)，则

$$\text{major limit of } ny(1-x) = n(1-x);$$

因此(2)变为

$$\begin{aligned} & n(1) - n(1-y) - n(1-x) \\ = & n(1) - n(1) + n(y) - n(1) + n(x) \\ = & nx + ny - n(1). \end{aligned}$$

因此nxy的下界要么是0，要么是n(x) + n(y) – n(1)，取决于n(y)是小于还是大于n(1 – x)，或者，这是一个等价的条件，取决于n(x)是大于还是小于n(1 – y)。

现在，由于0必然是任何类的数值的下界，因此只需考虑上述第二个表达式作为n(xy)的下界即可。于是我们有，

$$\begin{aligned} & \text{Major limit of } n(xy) = \text{ least of values } n(x) \text{ and } n(y). \\ & \text{Minor limit of } n(xy) = n(x) + n(y) - n(1).^{1} \end{aligned}$$

命题一。

5. 在给定n(x)、n(y)、n(z)等的值以及n(1)的值的情况下，表示由记号、、、*&c.*的任一成分所代表的类的上界和下界。

首先考虑构成部分 xyz。

显然，数值上界将是n(x)、n(y)、n(z)中的最小值。

数值下界可以如前一问题那样推导，但也可以从该问题的解答中推导。如下：

$$\text{Minor limit of } n(xyz) = n(xy) + n(z) - n(1). \tag{1}$$

[1]The above expression for the minor limit of nxy is applied by Professor De Morgan, by whom it appears to have been first given, to the syllogistic form:

某公司中大多数男人有外套。同一公司中大多数男人有马甲。

因此，公司里有些人有外套和马甲。

Now this means that $n(xyz)$ is at least as great as the expression $n(xy)+n(z)-n(1)$. But $n(xy)$ is at least as great as $n(x)+n(y)-n(1)$. Therefore $n(xyz)$ is at least as great as

$$n(x)+n(y)-n(1)+n(z)-n(1),$$
$$\text{or} \qquad n(x)+n(y)+n(z)-2n(1).$$

Hence we have

$$\text{Minor limit of } n(xyz) = n(x)+n(y)+n(z)-2n(1).$$

By extending this mode of reasoning we shall arrive at the following conclusions:

第一，由任一成分所代表的类的数值上界，可以通过将n分别加到该成分的每个因子上，并取所得值中的最小值来求得。

第二，小极限将通过把上述所有值相加，并从结果中减去n(1)的值的次数减一来求得。

因此我们应有

$$\text{Major limit of } nxy(1-z) = \text{ least of the values } nx,\ ny, \text{ and } n(1-z).$$
$$\text{Minor limit of } nxy(1-z) = n(x)+n(y)+n(1-z)-2n(1)$$
$$= nx+n(y)-n(z)-n(1).$$

在使用一般记号时，或许最好将所有值n(x)、n(y)、n(1 – z)视为n { xy(1 – z) }的上界，因为事实上它不能超过其中任何一个。在以下研究中，我将采用这种表达方式。

命题二。

6. 在给定n(x)、n(y)、n(z)等的值以及n(1)的值的情况下，确定由记号、、、*&*.的若干成分所表达的类的数值上界。

显然，确定这样一个界限的一种方法是构造各成分上界的最小可能和。因此，表达式

$$n\{xy+(1-x)(1-y)\}$$

的上界可以通过将第一个成分所提供的两个值nx、ny中的较小者，与第二个成分所提供的两个值n(1 – x)、n(1 – y)中的较小者相加来求得。如果我们不知道在每种情况下哪个是最小值，我们就必须构造四个可能的和，并舍弃其中等于或超过n(1)的任何和。因此在上面的例子中，我们将有

$$nx \quad +n(l-x) = n(l).$$
$$n(x)+n(1-y) = n(1)+n(x)-n(y).$$
$$n(y)+n(l-y) = n(l)+n(y)-n(x).$$
$$n(y)+n(1-y) = n(1).$$

舍弃上述首末两值，我们得到

$$n(1) + n(x) - n(y), \text{ and } n(1) + n(y) - n(x),$$

作为所需的表达式，其中一个将(除非nx = ny)小于n(l)，另一个则大于。当然必须取最小值。

当两个或更多成分具有一个共同因子，如 x 时，正如从原理 i.明显可见的，该因子在主极限的最终表达式中只能提供一个单项 n(x)。因此，如果 n(x) 作为主极限出现在两个或更多成分中，我们在把这些极限相加时，必须用 nx 代替 nx + nx，依此类推。例如，取表达式 n { xy + x(1 – y) z }。这个表达式的主极限，由加法直接给出，将是--

$$\begin{array}{ll} 1.\ nx. & 4.\ ny + nx. \\ 2.\ nx + n(1-y). & 5.\ ny + n(1-y). \\ 3.\ nx + n(z). & 6.\ ny + nz. \end{array}$$

在这些当中，只需保留第一个和第六个；第二个、第三个和第四个大于第一个；第五个等于n(1)。因此界限为

$$n(x) \text{ and } n(y) + n(z),$$

而在这两个值中，必须取最后一个，假设它小于n(1)。

这些考虑引导我们得出以下规则：

规则--从每个成分中取一个因子，并在其前面加上记号，将由此形成的各项或结果相加，舍弃同一项的所有重复；如此得到的和将是该表达式的一个上界，而所有这样的和中的最小值将是所要采用的上界。

因此，该表达式的主要极限

$$xyz + x(1-y)(1-z) + (1-x)(1-y)(1-z)$$

会是

$$\begin{array}{c} n(x) + n(1-y), \text{ and } n(x) + n(1-z), \\ \text{or} n(x) + n(1) - n(y), \text{ and } n(x) + n(1) - n(z). \end{array}$$

如果我们从第一项中选取n(y)开始，并从第二项中取n(x)，我们就必须从第三项中取n(1 – y)，这将给出

$$n(y) + n(x) + n(1-y), \text{ or } n(1) + n(x).$$

But as this result exceeds $n(1)$, which is an obvious major limit to *every* class, it need not be taken into account.

命题三。

7. 求由记号所表示的类的最小数值极限，已知 n(x) , n(y) , n(z) ...n(1) .

这一目标可以通过应用前一个命题并结合原理ii来实现，但用以下方法实现更好：

设任意两个仅相差一个因子的成分相加，以形成单个类项如 x(1 – y) + xy 形成 x，并且这种聚合已尽可能进行，即从给定的成分序列中选出尽可能多的此类和，每个这样的和包含尽可能多的可归入单个项的成分子，而不考虑所述成分中是否有任何成分进入其他项的构成，将这些最终的聚合体连同那些不能如此相加的成分一起，作为不同的项写下。然后，由命题 I.推得的那些项的各个下限，将是给定表达式的下限，并且这些下限中只有一个同时是正的。

因此，从表达式 xy +(1 – x) y +(1 – x)(1 – y) 中，我们可以通过分别将第一项和第二项相加，以及将第二项和第三项相加，构成聚合 y 和 1 – x。因此 n(y) 和 n(1 – x) 将是给定表达式的最小极限。再者，如果给定的表达式是

$$xyz + x(1-y)z + (1-x)yz + (l-x)(1-y)z \\ + xy(1-z) + (1-x)(1-y)(1-z),$$

我们应通过前四项相加得到单项 z，通过第一项和第五项相加得到单项 xy，通过第四项和第六项相加得到单项(1 – x)(1 – y)；并且没有其他方式可将成分归入单项，也没有任何成分未被如此考虑。所得三项给出给定表达式的下限值

$$n(z),\ n(x) + n(y) - n(1), \\ \text{and} n(1-x) + n(1-y) - n(1),\ \text{or}\ n(1) - n(x) - n(y).$$

8. 上述规则的证明在于正确应用以下原理：--第一。任何可相加为单项的成分集合的下限，显然将是该单项的下限。这解释了规则的第一部分。第二。任何两项之和的下限--这两项要么是不同的成分，要么由不同的成分构成，但不能相加在一起--将是它们各自下限之和，如果这两个下限都是正的；但如果一个是正的，另一个是负的，则它将等于正的下限单独。因为如果加上负的，极限的值将减小，即两项之和的值将小于单项的值。现在，只要两个成分在不止一个因子上不同，以致不能相加在一起，两者的下限就不可能都是正的。因此，设项为 xyz 和(1 – x)(1 – y) z，它们在

two factors, the minor limit of the first is $n(x+y+z-2)$, that of the second $n(1-x+1-y+z-2)$, or,

$$\text{1st. } n\{x+y-1-(1-z)\}. \quad \text{2nd. } n\{1-x-y-(1-z)\}.$$

如果 n(x + y – 1) 是正的，n(1 – x – y) 是负的，并且第二个必须是负的。如果 n(x + y – 1) 是负的，第一个是负的；对于涉及更多因子的情况也类似。以这种方式可以表明，根据规则应用中聚合项的形成方式，不同项的两个下限不能相加在一起，因为要么那些项将涉及某个共同成分，在这种情况下显然我们不能将它们的下限相加，--要么两者的下限不会都是正的，在这种情况下相加将是无用的。

命题四。

9. 已知逻辑定义的任意类 、 、*&c.*中所包含的个体各自数目，推导出任意其他类的数值极限系统，该类也是逻辑定义的。

由于这是本章打算讨论的最一般的问题，前面的探究只是对它的引导，而后续的探究则涉及其应用，因此有必要清楚地说明其性质和设计。

当类 s、t ...w 被称为逻辑定义时，意思是它们是这样定义的类，使我们能够写出它们的符号表达式，无论所讨论的类是简单还是复合。通过本论著的一般方法，记号 w 随后可以直接确定为记号 s、t、&c.的展开函数，形式为

$$w = A + 0B + \frac{0}{0}C + \frac{1}{0}D, \tag{1}$$

其中 A、B、C 和 D 由 s、t 等的成分构成。如何从这样的表达式以最一般的方式确定 w 的数值极限，将在以后考虑。目前我们仅旨在表明，根据先前命题中发展的原理，这一目标能在多大程度上实现；这样的探究对于本著作的目的而言是足够的。为简单起见，我将把我的论证建立在特定的展开式上，

$$w = st + 0s(1-t) + \frac{1}{0}(1-s)t + \frac{0}{0}(1-s)(1-t), \tag{2}$$

其中所有种类的系数都呈现出来。

对于成分(1 – s)(1 – t)，其系数为$\frac{0}{0}$,它是隐含

即该成分所表示的类中的一些、没有或全部成员被发现于 w 中。显然，当(1 – s)(1 – f) 所表示的类的所有成员都被发现于 w 中时，n(w) 将具有其最高数值。此外，由于 s(1 – t) 和(1 – s) t 所表示的类中包含的个体没有一个

被发现于 w 中，w 的较高数值极限将与类 st +(1 – s)(1 – t) 的极限相同。因此，它们是

$$ns + n(1-t) \text{ and } nt + n(1-s).$$

In like manner a system of superior numerical limits of the development $A + 0B + \frac{0}{0}C + \frac{1}{0}D$, *may be found from those of* $A + C$ *by Prop. 2.*

Again, any minor numerical limit of w will, by Principle II., be given by the expression

$$n(1) - \text{ major limit of } n(1-w),$$

but the development of w being given by (1), that of $1-w$ will obviously be

$$1 - w = 0A + B + \frac{0}{0}C + \frac{1}{0}D.$$

这可以直接由第10章命题2的方法证明。因此

$$\begin{aligned} \text{Minor limit of } n(w) &= n(1) - \text{ major limit } (B + C) \\ &= \text{ minor limit of } (A + D), \end{aligned}$$

根据原理ii，因为类 A + D 和 B + C 是互补的。因此(2)的第二成员的最小极限将是 n(t)，并且，推广这种推理方式，我们得到以下结果：

一个发展的次要极限系统

$$A + 0B + \frac{0}{0}C + \frac{1}{0}D$$

将由 A + D 的最小极限给出。

这个结果也可以直接推断出来。因为对于最小数值极限，我们必须寻求最大的。现在，我们一般通过将类 D 与 A 在 w 的表达式中连接起来，获得更高的最小极限，正如在我们被允许进行的逻辑学的各种例子中所展示的，这种组合比我们否则会得到的更高。

Finally, as the concluding term of the development of w indicates the equation $D = 0$, it is evident that $n(D) = 0$. Hence we have

$$\text{Minor limit of } n(D) \overset{=}{<} 0,$$

而这个方程，通过命题3处理，给出了数值元素 n(s)、n(t)、&c.之间的必要条件，以便问题可以是真实的，并且可以在其数据中体现可能经验的结果，

因此，从项10(1–s)t在(2) 的第一成员中我们应该推断出

$$\begin{aligned} n(1-s) + n(t) - n(1) &\overset{=}{<} 0, \\ \therefore n(t) &\overset{=}{<} n(s). \end{aligned}$$

这些结论可归纳为以下规则：

10. 规则。- 确定类的表达式，作为记号 、 、&c.的展开逻辑函数，形式为

$$w = A + 0B + \frac{0}{0}C + \frac{1}{0}D.$$

那么将

$$\begin{aligned} &\text{Maj. lim. } w = \text{ Maj. lim. } A + C. \\ &\text{Min. lim. } w = \text{ Min. lim. } A + D. \end{aligned}$$

数据之间的必要数值条件由不等式给出

$$\text{Min. lim. } D \overset{=}{<} n(1).$$

为了将上述方法应用于概率问题解的限制，只需在每个公式中将 n(x) 替换为 Prob.x，将 n(y) 替换为 Prob.y,&c.，最后将 n(1) 替换为 1。然而，由于应用非常重要，以规则的形式展示变换的主要结果可能是可取的。

11. 已知任意事件 s、t、&c.的概率，其中另一个事件 w 是一个展开的逻辑函数，形式为

$$w = A + 0B + \frac{0}{0}C + \frac{1}{0}D,$$

要求 Prob.w 的上下极限系统，以及数据之间的条件。

解。- Prob.(A + C) 的上限和 Prob.(A + D) 的下限将形成所寻求的两个这样的系统。数据中常数之间的条件将由不等式给出，

$$\text{Inf. lim. Prob. } D \overset{=}{<} 0.$$

在应用这些原则时，我们始终

Inf.lim.Prob.x ^{1} x ^{2} ...x n = Prob.x ^{1} + Prob.x ^{2} ...+ Prob.x n –(n – 1) .此外，下限只能从单个项确定，无论是给定的还是通过聚合形成的。上限包含在形式中

P Prob.x, Prob.x 仅适用于不同的记号，并且是
取自其上限被寻求的表达式中的不同项。因此 Prob.xyz + x(1 – y)(1 – z) 的上限是

$$\text{Prob. } x, \quad \text{Prob. } y + \text{ Prob. } (1 - z), \text{ and Prob. } z + \text{ Prob. } (1 - y).$$

请注意，如果在最后一种情况下我们从第一项取 Prob.z，从第二项取 Prob.(1 – z)--这种连接不被禁止--我们将得到它们的和为1，作为结果这将是无用的，因为`*a*

先验必然的。显然，我们可以拒绝任何不在0和1之间的极限。

让我们将此方法应用于上一章例7，情况iii。最终的逻辑解是

$$x = \frac{0}{0}stu + \frac{1}{0}s\bar{t}u + \frac{1}{0}st\bar{u} + s\bar{t}\bar{u} + \frac{1}{0}\bar{s}tu + 0\bar{s}\bar{t}u + 0\bar{s}t\bar{u} + 0\bar{s}\bar{t}\bar{u},$$

所给出的数据

$$\text{Prob. } s = p, \quad \text{Prob. } t = q, \quad \text{Prob. } u = r.$$

我们将寻求 x 的数值极限，以及连接 p、q 和 r 的条件。根据规则，x 的上限由 stu + s¯t¯u 的上限给出。因此，它们是

$$p, q + 1 - r, \quad r + 1 - q.$$

x 的下限由以下各项的下限给出

$$s\bar{t}u + st\bar{u} + s\bar{t}\bar{u} + \bar{s}tu.$$

我们可以将这些成分中的第一个和第三个收集到单项 s¯t 中，将第二个和第三个收集到单项 s¯u 中。x 的下限然后必须分别从项 s(1 – t)、s(1 – u)、(1 – s) tu 推导出，这些给出

$$p + 1 - q - 1, \quad p + 1 - r - 1, \quad 1 - p + q + r - 2,$$

or

$$p - q, \quad p - r, \quad \text{and } q + r - p - 1.$$

Finally, the conditions among the constants p, q, and r, are given by the terms

$$s\bar{t}u, \quad st\bar{u}, \quad \bar{s}tu,$$

由此，根据规则，我们推得

$$p + 1 - q + r - 2 \overset{=}{<} 0, \quad p + q + 1 - r - 2 \overset{=}{<} 0, \quad 1 - p + q + r - 2 \overset{=}{<} 0.$$

$$\text{or } 1 + q - p - r \overset{=}{>} 0, \quad 1 + r - p - q \overset{=}{>} 0, \quad 1 + p - q - r \overset{=}{>} 0.$$

这些是最终解分析中使用的限制条件。然而，在该解中限制 λ 的条件仅仅是从量 s、t 和 u 应为正的条件确定的。从上述探究中很可能可以推导出该量的更窄极限。

12. 以下应用取自一个重要问题，其解将在下一章给出。已知，

$$\text{Prob. } x = c_1, \quad \text{Prob. } y = c_2, \quad \text{Prob. } s = c_1p_1, \quad \text{Prob. } t = c_2p_2,$$

连同逻辑方程

$$z = stxy + s\bar{t}x\bar{y} + \bar{s}t\bar{x}y + 0\bar{s}\bar{t}$$
$$+\frac{1}{0}\begin{cases} stx\bar{y} + st\bar{x}y + st\bar{x}\bar{y} + s\bar{t}xy + s\bar{t}\bar{x}y \\ \quad +s\bar{t}\bar{x}\bar{y} + \bar{s}txy + \bar{s}tx\bar{y} + \bar{s}t\bar{x}\bar{y}; \end{cases}$$

并且要求确定常数 c 1、c 2、p 1、p 2之间的条件，以及 z 的主要极限和次要极限。

首先让我们寻求常数之间的条件。将我们的注意力限制在系数为10,我们容易形成，通过成分的聚合,以下各项，即：

$$s(1-x), \qquad t(1-y), \qquad sy(1-t), \qquad tx(1-s);$$

我们也不能形成任何不包含在这些之下的其他项。因此常数之间的条件是，

$$n(s) + n(1-x) - n(1) \overline{=}< 0,$$
$$n(t) + n(1-y) - n(1) \overline{=}< 0,$$
$$n(s) + n(y) + n(1-t) - 2n(1) \overline{=}< 0,$$
$$n(t) + n(x) + n(1-s) - 2n(1) \overline{=}< 0.$$

Now replace $n(x)$ by c_1, $n(y)$ by c_2, $n(s)$ by c_1p_1, $n(t)$ by c_2p_2, and $n(1)$ by 1, and we have, after slight reductions,

$$c_1p_1 \overline{=}< c_1, \qquad c_2p_2 \overline{=}< c_2,$$
$$c_1p_1 \overline{=}< 1 - c_2(1-p_2), \qquad c_2p_2 \overline{=}< 1 - c_1(1-p_1).$$

那么，这些就是常数之间所必需的条件。

同样，z 的主要极限与该表达式的极限相同

$$stxy + s(1-t)x(1-y) + (1-s)t(1-x)y;$$

只要我们把那些条件记在心里

$$n(s) \overline{=}< n(x), \qquad n(t) \overline{=}< n(y),$$

上述已确定的内容，将会被发现是

$$n(s) + n(t), \text{ or, } c_1p_1 + c_2p_2,$$

n(s) + n(1 – x) ， 或，1 – c 1(1 – p 1) n(t) + n(1 – y) ， 或，1 – c 2(1 – p 2) .最后，为了确定 z 的较小极限，我们容易从成分中形成，其系数为 1 或10,该单个项s和t,也不能任何其他未包含在这些之下的项通过选择或聚合形成。因此，对于 z 的较小极限，我们有值 c 1 p 1和 c 2 p 2。

13. 应当注意，上述展开的方法并不总是给出可能确定的最窄极限。但据我相信，它在所有情况下都充分地限制了概率论中问题的解。

然而，确定一个类的数值外延的最窄界限的问题，总是可以化归为纯粹代数的形式。[2] 因此，重新取方程

$$w = A + 0B + \frac{0}{0}C + \frac{1}{0}D,$$

设 w 的最高下数值极限由公式 an(s) + bn(t) ...+ dn(1) 表示，其中 a, b, c, ...d 是待确定的数值常数，而 s、t 等是逻辑记号，A、B、C、D 是成分。那么

$$an(s) + bn(t) \ldots + dn(1) = \text{ minor limit of } A \text{ subject}$$

到条件 D = 0。

因此，如果我们展开该函数

$$as + bt \ldots + d,$$

从结果中剔除在 D 中发现的所有成分，那些保留下来的、并且也在 A 中发现的成分的系数，其值各自不应超过 1，而那些保留下来的、并且不在 A 中发现的成分的系数，其值各自不应超过 0。因此

=

我们将得到一系列形如 f < 1 的不等式,以及另一系列

=

形式 g < 0,f 和 g 是 a、b、c 等的线性函数。那么,那些 a, b ...d 的值,在满足上述条件的同时,使函数

$$an(s) + bn(t) \ldots + dn(1),$$

取得其最高值，必须被确定，而所论的最高值将是 w 的最高次极限。在上述内容之上，我们还可以补充为确定给定常数 n(s) , n(t) ...n(1) 之间的关系而类似地形成的关系。

14. 以下这个稍显复杂的例子将表明，当问题涉及一个任意元素、使它成为一组数据相同但所求问题不受限制的问题的代表时，解的限制是如何实现的。

问题。--关于 n 个事件 x [1] x [2] ...x n，已知以下具体情况：第一，事件 x [1]将发生，或者所有事件都不发生的概率是 p [1]。

---

2 作者遗憾地遗失了一份约四年前写成的手稿，他相信其中曾相当详尽地展开了这一方法。他对内容的记忆几乎完全局限于这样一种印象：该方法的原理与上述相同，并且其充分性得到了证明。几乎无需说明，本章先前的方法更容易，尽管确实不那么一般。

第二，事件 x 2将发生，或者所有事件都不发生的概率是 p 2。其余事件依此类推。

要求求出由一般函数形式 φ(x 1 ...x n) 或 φ 所表示的任何单个事件或事件组合的概率。

沿用前面的记号，本题的数据为

$$\text{Prob. } (x_1 + \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n) = p_1 \ldots \text{Prob. } (x_n + \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n) = p_n.$$

And Prob. $\phi(x_1 \ldots x_n)$ is required.

Assume generally

$$x_r + \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n = s_r, \tag{1}$$

$$\phi = w. \tag{2}$$

我们由此得到该问题的集体逻辑方程

$$\sum \{ (x_r + \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n) \bar{s}_r + s_r (\bar{x}_r - \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n) \} + \phi \bar{w} + w \bar{\phi} = 0. \tag{3}$$

从这个方程中我们必须消去记号 x 1 , ...x n，并把 w 确定为 s 1 ...s n 的展开逻辑函数。

让我们把上述消元的结果表示成如下形式

$$Ew + E'(1 - w) = 0;$$

那么 E 将是从该方程中消去相同记号的结果

$$\sum \{ (x_r + \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n) \bar{s}_r + s_r (\bar{x}_r - \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n) \} + 1 - \phi = 0. \tag{4}$$

现在 E 将是所有成分的系数的乘积(参照记号 x 1 , x 2 ...x n 来考虑)，这些成分出现在上述方程第一个成员的展开式中。此外，φ，因此 1 – φ，将由一系列这样的成分组成，它们各自的系数为 1。在确定(4)的第一个成员的展开式中系数的形式时，将它们按以下方式排列将是方便的：

1st. The coefficients of constituents found in $1 - \phi$.

2nd. The coefficient of $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$, if found in ϕ.

3rd. The coefficients of constituents found in ϕ, excluding the constituent $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$.

The above is manifestly an exhaustive classification.

First then; the coefficient of any constituent found in $1 - \phi$, will, in the development of the first member of (4), be of the form

1 + 由X导出的正项

因此，每一个这样的系数都可以用1来代替，见第九章命题一。

其次； x1.....¯xn 的系数，若在 φ 中出现，在 (4) 第一项的展开式中将是

$$\sum \bar{s}_r, \text{ or } \bar{s}_1 + \bar{s}_2 \ldots + \bar{s}_n$$

Thirdly; the coefficient of any other constituent, $x_1 \ldots x_i, \bar{x}_{i+1} \ldots \bar{x}_n$, found in ϕ, in the development of the first member of (4) will be $\bar{s}_1 \ldots \bar{s}_i + s_{i+1} \ldots + s_n$.

现在可以看出，E 是上面确定的所有系数的乘积；但由于那些未出现在 φ 中的成分的系数归结为 1,E 可以被视为那些出现在 φ 中的成分的系数的乘积。从这些系数形成的方式，我们推导出确定 E 的以下规则，即，在 φ 中出现的每个成分中，除了成分 x 1¯x 2 ...¯x n，对于 x 1写 s 1，对于 x l 写 s 1，依此类推，并相加结果；但对于成分 x 1 ,¯x 2 ...¯x n，如果它出现在 φ 中，写 s 1 +¯s 2 ...+¯s n，所有这些和的乘积是 E。

为求 E′，我们必须在 (3) 中令 w = 0，并从化简后的方程中消去 x 1 , x 2 ...x n。该方程将是

$$\sum \{(x_r + \bar{x}_1 \ldots + \bar{x}_n)\bar{s}_r + s_r(\bar{x}_r - \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n)\} + \phi = 0. \tag{5}$$

Hence E' will be formed from the constituents in $1-\phi$, i. e. from the constituents *not* found in ϕ in the same way as E is formed from the constituents found in ϕ.

Consider next the equation

$$Ew + E'(1 - w) = 0.$$

这给出

$$w = \frac{E'}{E' - E}. \tag{6}$$

现在 E 和 E′是记号 s 1 , s 2 ...s n 的函数。因此，w 的值的展开式将包含由这些记号所能形成的全部成分，并按照展开规则所确定的、附于其上的适当系数。

此外，E 和 E′各自通过因子的乘法形成，并且它们中任何一个都不能消失，除非组成它的某个因子消失。再者，任何因子，如 s 1 ...+¯s n 只能当通过加法形成它的所有项一起消失时才能消失，因为在展开式中我们只赋予这些项值 0 和 1。进一步明显的是，没有两个彼此不同的因子能一起消失。因此，因子 s 1 +¯s 2 ...+¯s n，和 s 1 +¯s 2 ...+¯s n，不能同时消失，因为前者不能消失，除非 s 1 = 0，或 s 1 = 1；但后者不能消失，除非 s 1 = 0。

首先，让我们确定成分 s 1¯s 2 ...¯s n 在 w 的值的展开式中的系数。

同时假定 s 1 = 1、¯s 2 = 1 ...¯s n = 1，如果这出现在 E 或 E′中，将使因子 s 1 + s 2 ...+ s n 消失；并且没有其他

在同一假设下因子会消失；但 s 1 + s 2 ...+ s n 不作为 E 或 E ′的因子出现；因此，这些量中任何一个都不能消失；因此，表达式 E ′ E ′ – E ,是既不1,0,也不00.

Wherefore the coefficient of $\bar{s}_1\ \bar{s}_2 \ldots \bar{s}_n$ *in the expanded value of* w, may be represented by $\frac{1}{0}$.

Secondly, let us determine the coefficient of the constituent $s_1\ s_2 \ldots s_n$. The assumptions $s_1 = 1, s_2 = 1, \ldots s_n = 1$, would cause the factor $\bar{s}_1 + \bar{s}_2 \ldots + \bar{s}_n$ to vanish. Now this factor is found in E and not in E' whenever ϕ contains both the constituents $x_1\ x_2 \ldots x_n$ and $\bar{x}_1\ \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$. Here then $\frac{E'}{E'-E}$ becomes $\frac{E'}{E'}$ or 1. The factor $\bar{s}_1 + \bar{s}_2 \ldots + \bar{s}_n$ is found in E' and not in E, if ϕ contains neither of the constituents $x_1\ x_2 \ldots x_n$ and $\bar{x}_1\ \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$. Here then $\frac{E'}{E'-E}$ becomes $\frac{0}{-E}$ or 0. Lastly, the factor $\bar{s}_1 + \bar{s}_2 \ldots + \bar{s}_n$ is contained in both E and E', if one of the constituents $x_1\ x_2 \ldots x_n$ and $\bar{x}_1\ \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$ is found in ϕ, and one is not. Here then $\frac{E'}{E'-E}$ becomes $\frac{0}{0}$.

成分 s 1 s 2 ...s n 的系数，因此将是 1 , 0 ，或00，取决于它同时包含成分 x 1 x 2 ...x n 和 x 1- x 2 ...-x n ，还是两者都不包含，还是包含其中之一而不包含另一个。

Lastly, to determine the coefficient of any other constituent as $s_1 \ldots s_i\ \bar{s}_{i+1} \ldots \bar{s}_n$.

The assumptions $s_1 = 1, \ldots s_i = 1,\ s_{i+1} = 0,\ s_n = 0$, would cause the factor $\bar{s}_1 \ldots + \bar{s}_i + s_{i+1} \ldots + s_n$ to vanish. Now this factor is found in E, if the constituent $x_1 \ldots x_i\ \bar{x}_{i+1} \ldots \bar{x}_n$ is found in ϕ and in E', if the said constituent is not found in ϕ. In the former case we have $\frac{E'}{E'-E} = \frac{E'}{E'} = 1$; in the latter case we have $\frac{E'}{E'-E} = \frac{0}{0-E} = 0$.

Hence the coefficient of any other constituent $s_1 \ldots s_i,\ \bar{s}_{i+1} \ldots \bar{s}_n$ *is 1 or 0 according as the similar constituent* $x_1 \ldots x_i\ \bar{x}_{i+1} \ldots \bar{x}_n$ *is or is not found in* ϕ.

因此，我们可以实际地按以下方式确定w的值。从φ的给定表达式中剔除成分x 1 x 2 ...x c和 x 1- x 2 ...-x n，如果其中包含它们两者或其中之一，则在结果中将记号x 1 , x 2 , ...x n分别改为s 1 , s 2 , ...s n。成分s 1 s 2 ...s n和 s 1- s 2 ...-s n的系数，按上文针对这些情形给出的特殊规则确定，并令其他每个成分的系数为0。结果将是w作为s 1 , s 2 , ...s n的函数的值。

作为一个特例，设 φ = x 1。要求从给定数据确定事件 x 1的概率。

记号x 1按记号x 1 , x 2 , ...x n的整个序列展开，将生成以x 1为因子的那些记号的所有成分。在这些成分中将找到成分x 1 x 2 ...x n，但找不到成分 x 1- x 2 ...-x n。

Hence in the expanded value of x_1 as a function of the symbols $s_1, s_2, \ldots s_n$, the constituent $s_1\ s_2 \ldots s_n$ will have the coefficient $\frac{0}{0}$, and the constituent $\bar{s}_1\ \bar{s}_2 \ldots \bar{s}_n$ the coefficient $\frac{1}{0}$.

If from x_1 we reject the constituent $x_1\ x_2 \ldots x_n$, the result will be $x_1 - x_1 x_2 \ldots x_n$, and changing therein x_1 into s_1 &c., we have $s_1 - s_1 s_2 \ldots s_n$ for the

corresponding portion of the expression of x_1 as a function of $s_1, s_2, \ldots s_n$.

Hence the final expression for x_1 is

$$x_1 = s_1 - s_1 s_2 \ldots s_n + \frac{0}{0} s_1 s_2 \ldots s_n + \frac{1}{0} \bar{s}_1 \bar{s}_2 \ldots \bar{s}_n + \text{constituents whose coefficients are } 0. \tag{7}$$

上述展开式中系数为的所有成分之和。因此，我们将得到以下用于确定的代数方程组为 1、0 或00,将是1− s 1 -s 2 ...-s n。Prob.x 1 的，即：

$$\text{Prob. } x_1 = \frac{s_1 - s_1 s_2 \ldots s_n + c s_1 s_2 \ldots s_n}{1 - \bar{s}_1 \bar{s}_2 \ldots \bar{s}_n}, \tag{8}$$

with the relations

$$\frac{s_1}{p_1} = \frac{s_2}{p_2} \ldots = \frac{s_n}{p_n} = 1 - \bar{s}_1 \bar{s}_2 \ldots \bar{s}_n = \lambda. \tag{9}$$

可以看出，用于确定s 1 s 2 ...s n的关系式完全独立于函数φ的形式，而这些量的值一经确定，便适用于数据相同的所有可能问题，无论那些问题的*quæsita*如何变化。其概率被寻求的那个事件或事件组合的性质，只影响要代入s 1 s 2 ...s n的已确定值的函数的形式。由(9)我们有

$$s_1 = p_1 \lambda, \quad s_2 = p_2 \lambda, \ldots s_n = p_n \lambda.$$

Whence

$$1 - (1 - p_1 \lambda)(1 - p_2 \lambda) \ldots (1 - p_n \lambda) = \lambda.$$

Or,

$$1 - \lambda = (1 - p_1 \lambda)(1 - p_2 \lambda) \ldots (1 - p_n \lambda); \tag{10}$$

from which equation the value of λ is to be determined.

Supposing this value determined, the value of Prob. x_1 will be

$$\frac{p_1 \lambda - (1 - c) p_1 p_2 \ldots p_n \lambda^n}{1 - (1 - p_1 \lambda)(1 - p_2 \lambda) \ldots (1 - p_n \lambda)},$$

或，通过(10)化简，

$$\text{Prob. } x_1 = p_1 - (1 - c) p_1 p_2 \ldots p_n \lambda^{n-1}. \tag{11}$$

Let us next seek the conditions which must be fulfilled among the constants $p_1, p_2, \ldots p_n$, and the limits of the value of Prob. x_1.

由于只有一个系数为10,的项,所以只有一个常数之间的条件，即，

$$\begin{aligned} & \text{Minor limit, } (1-s_1)(1-s_2)\ldots(1-s_n) \overline{=} < 0. \\ \text{Or,} \quad & n(1-s_1)+n(1-s_2)\ldots+n(1-s_n)-(n-1)n(1) \overline{=} < 0. \\ \text{Or,} \quad & n(1)-n(s_1)-n(s_2)\ldots-n(s_n) \overline{=} < 0. \\ \text{Whence} \quad & p_1+p_2\ldots+p_n \overline{=} > 1, \end{aligned}$$

所需条件。

Prob.x 1的主要极限是那些系数为 1 或00.但那个和是s1.的成分之和的主要极限。

因此，

主要极限，Prob.x 1 = 主要极限 s 1 = p 1 .

Prob.x 1的次要极限将与表达式的次要极限相同

$$s_1 - s_1 s_2 \ldots s_n + (1-s_1)(1-s_2)\ldots(1-s_n).$$

稍加注意就会表明，由上述内容所能形成的、各自包含尽可能多的成分的不同聚合项，将是以下这些，即：

$$s_1(1-s_2), \quad s_1(1-s_3), \ldots s_1(1-s_n), \quad (1-s_2)(1-s_3)\ldots(1-s_n).$$

由这些我们推出次极限的如下表达式，即：

$$p_1 - p_2, \quad p_1 - p_3 \ldots p_1 - p_n, \quad 1 - p_2 - p_3 \ldots - p_n.$$

因此，Prob.x 1的值既不会低于这些值中的任何一个，也不会超过 p 1的值。

然而，我们可以不采用这些条件，而是直接利用概率中一般方法的论证所陈述的原理。条件 s 1 , s 2 , ...s n 各自必须小于1，这要求 λ 应小于各量1 p 1,1 p 2,..1 p n .并且该条件 s 1 , s 2 , ...s n 各自必须大于0，这要求 λ 也应大于0。现在 p 1 p 2 ...p n 作为满足该条件的真分数

$$p_1 + p_2 \ldots + p_n > 1,$$

可以证明，从中心方程(10)只能推出一个小于量1 p 1,1 p 2,..1 p n .该 λ 的值，因此，就是所求的那个值。

为了证明这一点，让我们考虑方程

$$(1-p_1\lambda)(1-p_2\lambda)\ldots(1-p_n\lambda) - 1 + \lambda = 0.$$

当 λ = 0 时，第一项消失，方程得到满足。让我们考察第一项在极限 λ = 0 与

λ = 1 p−1,假设p1该最大的值之中p1p2..pn.以该方程的第一项表示为 V，我们有

$$\frac{dV}{d\lambda} = -p_1(1-p_2\lambda)\dots(1-p_n\lambda)\dots - p_n(1-p_1\lambda)\dots(1-p_{n-1}\lambda)+1,$$

which, when $\lambda = 0$, assumes the form $-p_1 - p_2 \dots - p_n + 1$, and is negative in value.

Again, we have

$$\frac{d^2V}{d\lambda^2} = p_1p_2(1-p_3\lambda)(1-p_n\lambda) + \ \&\text{c.},$$

由一系列项组成，这些项在关于 λ 值的给定限制下是正的。

最后，当 λ = 1 p 1,我们有

$$V = -1 + \frac{1}{p_1},$$

这是正面的。

由上述一切可见，若我们构造一条曲线，使其纵坐标表示与横坐标 λ 相对应的 V 之值，则该曲线将经过原点，且对于 λ 的较小值将位于横坐标之下。在 λ = 0 与 λ = 1 p 1bedownwards,and在极限1 p 1thecurvewillbeabovetheabscissa,itsordinatebeing为正之间，其凸性将向下。由此描述可知，它将在指定范围内与横坐标相交一次，且仅一次，即在 λ = 0 与 λ = 1 p 1之间。

因此，问题的解由(11)表示，其中 λ 的值是方程(10)的位于 0 与1 p 1,1 p 2,..1 p n 之间的那个根。

常数 c 显然是概率：若事件 x1、x2、.....xn 全部发生或全部失败，它们将全部发生。

对 λ 值的这一确定，足以解决所有数据与刚才所考虑的问题相同的问题。正如根据先前的讨论我们所预料的那样，这是一个与函数 φ 的形式无关的确定。作为另一个例子，让我们假设

$$\phi = \ \text{or}\ w = x_1(1-x_2)\dots(1-x_n)\dots + x_n(1-x_1)\dots(1-x_{n-1}).$$

这等价于要求这样的概率：在事件 x 1 , x 2 , ...x n 中，有一个且仅有一个将发生。显然，w 的值将是

$$w = s_1(1-s_2)\dots(1-s_n)\dots + s_n(1-s_1)\dots(1-s_{n-1}) + \frac{1}{0}(1-s_1)\dots(1-s_n),$$

由此我们应得

$$\begin{aligned}
&\text{Prob. } \{x_1(1-x_2)\dots(1-x_n)\dots + x_n(1-x_1)\dots(1-x_{n-1})\} \\
&= \frac{s_1(1-s_2)\dots(1-s_n)\dots + s_n(1-s_1)\dots(1-s_{n-1})}{1-(1-s_1)\dots(1-s_n)} \\
&= \frac{p_1\lambda(1-p_2\lambda)\dots(1-p_n\lambda)\dots + p_n\lambda(1-p_1\lambda)\dots(1-p_{n-1}\lambda)}{\lambda} \\
&= \frac{p_1(1-\lambda)}{1-p_1\lambda} + \frac{p_2(1-\lambda)}{1-p_2\lambda}\dots + \frac{p_n(1-\lambda)}{1-p_n\lambda}
\end{aligned}$$

这个解很好地说明了导论章(I.16)中所作的评论。问题的本质困难在于其数据的性质，而不在于其求问项的性质。用以确定 λ 的中心方程以及与之相关的特殊讨论，对于通过改变原陈述中任意元素的解释而使该问题所能采取的任何形式，都同样适用。

第二十章

关于原因与结果联系的问题。

1. 因此，要在所有特称实例中领会原因与结果的关系，以便在思想中按照它们在自然中相联系的次序把这两个极端联系起来(因为*modus operandi*是我们所不知道的，而且必定永远不知道)，这就是科学的最终目标。本论著已经表明，在理智的构造中，对这种目标有特殊的关联。有一个思想领域，它只把事物理解为宇宙中共存的部分；但也有一个思想领域(第xi章)，在其中事物被领会为一条不间断的、并且在人类看来是无尽的链条的环节--它们在一种秩序中各有其位置，这秩序把它们既与那先于它们的东西联系起来，也与那将随它们之后而来的东西联系起来。在沉思这样一个系列时，不可能不感到原因与结果的关系高于一切其他关系而应得的优越地位。

在此我打算以其抽象形式来考虑一些涉及上述关系的问题。从这些问题的性质可以预料，这类问题之间存在着很大的差异。从`*a priori*所指定的、或由经验给出的原因的概率，以及它们各自与所考虑的结果相结合的概率，可能要求确定该结果的概率；而这或者是1st，绝对地，或者是2ndly，在给定条件下。以下一些问题中的某些较早的问题就与这样的目标有关。另一方面，可能要求从观察到的结果，以及从上述原因单独或结合产生此类结果的已知倾向，来确定某一特定原因的概率，或一个原因体系中某种特定联系的概率。这一类问题将在本章的后一部分中考虑，一般探究的其他形式也将予以注意。我要指出，尽管这些例子主要意在说明一种方法，但并未顾及该方法应用中的难易或便利问题。相反，它们被设计出来--无论成功与否--作为一类问题的典型，这类问题可以预料会从对原因与结果关系在其实际而可见的较复杂表现中的研究中产生。

2. 问题 I.- 两个原因 A [1]和 A [2]的概率分别为 c [1]和 c [2]。若原因 A [1]出现，则事件 E 将伴随它(无论是否作为原因 A [1]的结果)的概率为 p [1]，而若原因 A [2]出现，则该事件 E 将伴随它(无论是否作为它的结果)的概率为 p [2]。此外，事件 E 不可能在两个原因 A [1]和 A [2]均不出现的情况下出现。[1]求事件 E 的概率。

在原因 A [1]、A [2]相互排斥的情形下，这个问题所变成的问题的解是众所周知的，即

$$\text{Prob. } E = c_1p_1 + c_2p_2;$$

它表达了公认概率论中一个基本且非常重要的原理的一个特例。这里提出要在不受上述限制的情况下解决这个问题。

让我们表示

$$\begin{aligned}&\text{The cause } A_1 \text{ by } x.\\ &\text{The cause } A_2 \text{ by } y.\\ &\text{The effect } E \text{ by } z.\end{aligned}$$

于是我们得到如下数值数据：

$$\begin{aligned}&\text{Prob. } x = c_1, && \text{Prob. } y = c_2,\\ &\text{Prob. } xz = c_1p_1, && \text{Prob. } yz = c_2p_2. \end{aligned} \tag{1}$$

再者，如果原因 A [1]、A [2]都不存在，则结果 E 不发生；由此我们得到逻辑方程

$$(1-x)(1-y) = v(1-z).$$

或者，消去 v，

$$z(1-x)(1-y) = 0. \tag{2}$$

现在假设，

$$xz = s, \quad yz = t. \tag{3}$$

1 上述这类数据可能由经验提供的方式是容易设想的。我写作的房间窗外是一片田地，它可能因两种原因而泛滥，这两种原因彼此不同，但能够结合，即来自利河(River Lee)上游水源的洪水和来自海洋的潮汐。假设在N个不同场合所作的观察已产生以下结果：在A个场合，河流因春汛而上涨，而在这些场合中的P个场合，它被淹没了，无论是否由于这个原因。在B个场合，河流因潮汐而上涨，而在这些场合中的Q个场合，它被淹没了，无论是否由于这个原因。那么，假设在上述两种原因都不存在时，这片田地不可能被淹没，要求确定其被淹没的总概率。

这里，一般问题的元素 a、b、p、q 表示比值

$$\frac{A}{N}, \frac{P}{A}, \frac{B}{N}, \frac{Q}{B},$$

或者更确切地说，表示当 N 的值无限增大时那些比值所趋近的值。

然后，化简这些方程(VIII.7)，并将结果与(2)联系起来，xz(1 – s) + s(1 – xz) + yz(1 – t) + t(1 – yz) + z(1 – x)(1 – y) = 0 .(4) 从这个方程中，z必须被确定为x、y、s和t的展开逻辑函数，其概率由此借助数据推得，

$$\text{Prob. } x = c_1, \quad \text{Prob. } y = c_2, \quad \text{Prob. } s = c_1p_1, \quad \text{Prob. } t = c_2p_2. \tag{5}$$

Now developing (4) with respect to z, and putting $\bar{x}$ for $1 - x$, $\bar{y}$ for $1 - y$, and[2] so on, we have

$$\begin{aligned}
&(x\bar{s} + s\bar{x} + y\bar{t} + t\bar{y} + \bar{x}\bar{y})z + (s + t)\bar{z} = 0,\\
&\therefore z + \frac{s + t}{s + t - x\bar{s} - s\bar{x} - y\bar{t} - t\bar{y} - \bar{x}\bar{y}}\\
&= stxy + \frac{1}{0}stx\bar{y} + \frac{1}{0}st\bar{x}y + \frac{1}{0}st\bar{x}\bar{y}\\
&+\frac{1}{0}s\bar{t}xy + s\bar{t}x\bar{y} + \frac{1}{0}s\bar{t}\bar{x}y + \frac{1}{0}s\bar{t}\bar{x}\bar{y}\\
&+\frac{1}{0}\bar{s}txy + \frac{1}{0}\bar{s}tx\bar{y} + \bar{s}t\bar{x}y + \frac{1}{0}\bar{s}t\bar{x}\bar{y}\\
&+0\bar{s}\bar{t}xy + 0\bar{s}\bar{t}x\bar{y} + 0\bar{s}\bar{t}\bar{x}y + 0\bar{s}\bar{t}\bar{x}\bar{y}.
\end{aligned} \tag{6}$$

由这一结果我们得到(XVII.17),

$$\begin{aligned}
V &= stxy + s\bar{t}x\bar{y} + \bar{s}t\bar{x}y + \bar{s}\bar{t}xy + \bar{s}\bar{t}x\bar{y}\\
&\quad +\bar{s}\bar{t}\bar{x}y + \bar{s}\bar{t}\bar{x}\bar{y}\\
&= stxy + s\bar{t}x\bar{y} + \bar{s}t\bar{x}y + \bar{s}\bar{t}.
\end{aligned}$$

于是，从逻辑过渡到代数，我们得到以下方程组，u 代表所求的概率：

$$\begin{aligned}
\frac{stxy + s\bar{t}x\bar{y} + \bar{s}\bar{t}x}{c_1} &= \frac{stxy + \bar{s}t\bar{x}y + \bar{s}\bar{t}y}{c_2}\\
&= \frac{stxy + s\bar{t}x\bar{y}}{c_1p_1} = \frac{stxy + \bar{s}t\bar{x}y}{c_2p_2}\\
= \frac{stxy + s\bar{t}x\bar{y} + \bar{s}t\bar{x}y}{u} &= \frac{stxy + s\bar{t}x\bar{y} + \bar{s}t\bar{x}y + \bar{s}\bar{t}}{1} = V,
\end{aligned} \tag{7}$$

由此我们必须消去 s、t、x、y 和 V。

现在，如果我们有一系列相等的分数，如

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \ldots = \lambda,$$

我们知道

$$\frac{la + mb + nc}{la' + mb' + nc'} = \lambda.$$

2 原文为“ y for 1 = y”，此处由 Distributed Proofreaders 更正。

因此，由上述方程组我们可以推导出

$$\frac{\bar{s}t\bar{x}y}{u-c_1p_1}=\frac{s\bar{t}x\bar{y}}{u-c_2p_2}=\frac{\bar{s}\bar{t}}{1-u}=V;$$

whence we have, on equating the product of the three first members to the cube of the last,

$$\frac{s\bar{s}^2t\bar{t}^2x\bar{x}y\bar{y}}{(u-c_1p_1)(u-c_2p_2)(1-u)}=V^3. \tag{8}$$

同样，由系统(7)我们得到

$$\frac{\bar{s}\bar{t}\bar{x}}{1-u-c_1+c_1p_1}=\frac{\bar{s}\bar{t}\bar{y}}{1-u-c_2+c_2p_2}=\frac{stxy}{c_1p_1+c_2p_2-u}=V,$$

whence proceeding as before

$$\frac{s\bar{s}^2t\bar{t}^2x\bar{x}y\bar{y}}{(1-c_1+c_1p_1-u)(1-c_2+c_2p_2-u)(c_1p_1+c_2p_2-u)}=V^3. \tag{9}$$

令(8)与(9)中V^3的值相等，我们得到

$$\begin{aligned}&(u-c_1p_1)(u-c_2p_2)(1-u)\\&=\{1-c_1(1-p_1)-u\}\{1-c_2(1-p_2)-u\}(c_1p_1+c_2p_2-u),\end{aligned}$$

which may be more conveniently written in the form

$$\frac{(u-c_1p_1)(u-c_2p_2)}{c_1p_1+c_2p_2-u}=\frac{\{1-c_1(1-p_1)-u\}\{1-c_2(1-p_2)-u\}}{1-u}. \tag{10}$$

From this equation the value of u may be found. It remains only to determine which of the roots must be taken for this purpose.

3. 已经证明(XIX.12)，量u为了表示上述情形中所要求的概率，必须超过量c_1p_1、c_2p_2中的每一个，并小于量$1-c_1(1-p_1)$、$1-c_2(1-p_2)$和$c_1p_1+c_2p_2$中的每一个；此外，常数之间的条件是，后三个量必须各自超过前两个量中的每一个。现在我将证明，这些条件得到满足时，最终方程(10)只有一个根落在所指定的界限之内。因此该根就是u的所需值。

让我们分别用a、b表示下界c_1p_1、c_2p_2，并分别用a′、b′、c′表示上界$1-c_1(1-p_1)$、$1-c_2(1-p_2)$和$c_1p_1+c_2p_2$。于是一般方程可以表示为如下形式

$$\begin{aligned}&(u-a)(u-b)(1-u)-(a'-u)(b'-u)(c'-u)=0, \qquad (11)\\&\text{or}(1-a'-b')u^2-\{ab-a'b'+(1-a'-b')c'\}u+ab-a'b'c'=0.\end{aligned}$$

将上述方程的第一项用V表示，我们有

$$\frac{d^2V}{du^2}=2(1-a'-b'). \tag{12}$$

现在让我们假设 a 是 u 的下限中的最高者，a′是其上限中的最低者，并追踪 V 的值在 u = a 与 u = a′之间的变化过程。

当 u = a 时，我们从(11)的第一项的形式看出 V 为负，而当 u = a′时，我们看到 V 为正。在这些界限之间，V 连续变化而不变为无穷，并且$\frac{d^2V}{du^2}$isalwaysofthesame符号。

因此，如果u表示横坐标V，纵坐标表示一条平面曲线，那么显然该曲线将从对应于u = a的u轴下方的一点，过渡到对应于u = a′的u轴上方的一点，曲线保持连续，且其凹性或凸性始终朝向同一方向。稍加注意即可看出，在这些情况下，它必定与u轴相交一次，且仅相交一次。

因此，在界限u = a、u = a′之间，存在u的一个值，且仅有一个值，满足方程(11)。进一步可以看出，如果在思想中描出该曲线，那么当量1 – a′ – b′为正且大于量a′、b′、c′中的任何一个时，u的另一个值将小于a，当

1 – a′ – b′为负。由此可知，在(11)的解中，必须取根号的正号。我们于是得到

$$u = \frac{ab - a'b' + (1 - a' - b')c' + \sqrt{Q}}{2(1 - a' - b')}, \tag{13}$$

where $Q = \{ab - a'b' + (1 - a' - b')c'\}^2 - 4(1 - a' - b')(ab - a'b'c')$.

4. 这一研究的结果在某种程度上可以得到验证。因此，显然事件 E 的概率一般必定超过事件 E 与原因 A 1或 A 2同时出现的概率。因此我们必须有，正如解所表明的，

$$u > c_1p_1, \quad u > c_2p_2.$$

再者，显然结果 E 的概率一般必定小于当原因 A 1 , A 2互斥时它所会具有的概率。因此

$$u \leqq c_1p_1 + c_2p_2.$$

最后，由于结果 E 与原因 A 1同时出现之失败的概率一般必定小于 E 失败之绝对概率，我们有

$$c_1(1 - p_1) \leqq 1 - u,$$
$$\therefore u \leqq 1 - c_1(1 - p_1).$$

Similarly,

$$u \leqq 1 - c_2(1 - p_2).$$

And thus the conditions by which the general solution was limited are confirmed.

再者，令 $p^1 = 1, p^2 = 1$。这是假设当原因 A^1、A^2中任一者出现时，事件 E 将会发生。我们于是有 $a = c^1, b = c^2, a' = 1, b' = 1, c' = c^1 + c^2$，代入(13)我们得到

$$u = \frac{c_1c_2 - c_1 - c_2 - 1 + \sqrt{\{(c_1c_2 - c_1 - c_2 - 1)^2 + 4(c_1c_2 - c_1 - c_2)\}}}{-2}$$
$$= c_1 + c_2 - c_1c_2 \text{ on reduction}$$
$$= 1 - (1 - c_1)(1 - c_2).$$

现在这就是至少一个原因将会出现的概率的已知表达式，在此情形下，这显然就是事件 E 的概率。

最后，假设 c^1和 c^2非常小，以致它们的乘积可以忽略；那么 u 的表达式简化为 $c^1 p^1 + c^2 p^2$。现在，每个原因的概率越小，原因合取的概率就越小，且程度要高得多。因此，最终随着这种简化继续下去，事件 E 的概率变得与原因互斥时相同。

我之所以对这一个解详加论述，是因为它在某些方面可作为随后诸解的范本，其中有些解性质更为复杂，若无这样的准备，可能会显得困难。

5. 问题 II。--代替前一问题中所采用的假设，即当原因 A^1、A^2两者皆不出现时事件 E 不能发生，今假设原因 A^1、A^2不能两者皆不出现，并令其他情形如前不变。于是，求事件 E 的概率。

Here, in place of the equation (2) of the previous solution, we have the equation

$$(1 - x)(1 - y) = 0.$$

The developed logical expression of z is found to be

$$z = stxy + \frac{1}{0}stx\bar{y} + \frac{1}{0}st\bar{x}y + \frac{1}{0}st\bar{x}\bar{y}$$
$$+ \frac{1}{0}s\bar{t}xy + s\bar{t}x\bar{y} + \frac{1}{0}s\bar{t}\bar{x}y + \frac{1}{0}s\bar{t}\bar{x}\bar{y}$$
$$+ \frac{1}{0}\bar{s}txy + \frac{1}{0}\bar{s}tx\bar{y} + \bar{s}t\bar{x}y + \frac{1}{0}\bar{s}t\bar{x}\bar{y}$$
$$+ 0\bar{s}\bar{t}xy + 0\bar{s}\bar{t}x\bar{y} + 0\bar{s}\bar{t}\bar{x}y + \frac{1}{0}\bar{s}\bar{t}\bar{x}\bar{y};$$

而最终的解决方案是

$$\text{Prob. } E = u;$$

量 u 由方程的解确定

$$\frac{(u - a)(u - b)}{a + b - u} = \frac{(a' - u)(b' - u)}{u - a' - b' + 1}, \tag{1}$$

wherein $a = c_1p_1$, $b = c_2p_2$, $a' = 1 - c_1(1 - p_1)$, $b' = 1 - c_2(1 - p_2)$.

The conditions of limitation are the following:—That value of u must be chosen which exceeds each of the three quantities

$$a, b, \text{ and } a' + b' - 1,$$

而同时又少于这三个量中的每一个

$$a', b', \text{ and } a + b.$$

完全如同前一问题的解中那样，可以证明二次方程(1)将有一个根，且只有一个根，满足这些条件。这些条件本身是按与以前相同的规则推导出来的，只是下限 a ′ + b ′ – 1 是通过寻求 1 – z 的上限而得到的。

还可以补充说，数据中的常数除了满足上面隐含的条件，即量 a ′、b ′和 a + b 必须分别超过 a、b 和 a ′ + b ′ – 1 之外，还必须满足条件= c 1 + c 2 > 1。这从规则的运用中也看得出来。

6. 问题 III.- 两个事件 A 和 B 的概率分别为 a 和 b，若事件 A 发生则事件 E 将伴随发生的概率为 p，若事件 B 发生则同一事件 E 将伴随发生的概率为 q。求若事件 A 发生则事件 B 将发生的概率，或反之亦然，即若 B 发生则 A 将发生的概率。

让我们用 x 表示事件 A，用 y 表示事件 B，用 z 表示事件 E。于是数据为--

$$\begin{aligned} &\text{Prob. } x = a, && \text{Prob. } y = b. \\ &\text{Prob. } xz = ap, && \text{Prob. } yz = bq. \end{aligned}$$

由此需要求出

$$\frac{\text{Prob. } xy}{\text{Prob. } x} \text{ or } \frac{\text{Prob. } xy}{\text{Prob. } y}.$$

让et

$$xy = s, \quad yz = t, \quad xy = w.$$

消去 z，化简后得，

$$\begin{aligned} &s\bar{x} + t\bar{y} + s\bar{y}\bar{t} + x\bar{t}\bar{s} + xy\bar{w} + (1 - xy)w = 0, \\ &\qquad = xyst + \frac{1}{0}x\bar{y}st + \frac{1}{0}\bar{x}yst + \frac{1}{0}\bar{x}\bar{y}st \\ \therefore w = \frac{s\bar{x} + t\bar{y} + s\bar{y}\bar{t} + x\bar{t}\bar{s} + xy}{2xy - 1} &+ \frac{1}{0}xys\bar{t} + 0x\bar{y}s\bar{t} + \frac{1}{0}\bar{x}ys\bar{t} + \frac{1}{0}\bar{x}\bar{y}s\bar{t} \\ &+ \frac{1}{0}xy\bar{s}t + \frac{1}{0}x\bar{y}\bar{s}t + 0\bar{x}y\bar{s}t + \frac{1}{0}\bar{x}\bar{y}\bar{s}t \\ &+ xy\bar{s}\bar{t} + 0x\bar{y}\bar{s}\bar{t} + 0\bar{x}y\bar{s}\bar{t} + 0\bar{x}\bar{y}\bar{s}\bar{t}. \end{aligned} \tag{1}$$

因此，从逻辑过渡到代数，

$$\text{Prob. } xy = \frac{xyst + xy\bar{s}\bar{t}}{V},$$

x、y、s 和 t 由方程组确定

$$\begin{aligned}\frac{xyst + x\bar{y}s\bar{t} + xy\bar{s}\bar{t} + x\bar{y}\bar{s}\bar{t}}{a} &= \frac{xyst + \bar{x}y\bar{s}t + xy\bar{s}\bar{t} + \bar{x}y\bar{s}\bar{t}}{b} \\ = \frac{xyst + x\bar{y}s\bar{t}}{ap} &= \frac{xyst + \bar{x}y\bar{s}t}{bq} \\ = xyst + x\bar{y}s\bar{t} + \bar{x}y\bar{s}t + xy\bar{s}\bar{t} + x\bar{y}\bar{s}\bar{t} + \bar{x}y\bar{s}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\bar{s}\bar{t} &= V.\end{aligned}$$

为将上述系统化为更便利的形式，令每一项都除以 x¯y¯s¯t，并在结果中令

$$\frac{xs}{\bar{x}\bar{s}} = m, \quad \frac{yt}{\bar{y}\bar{t}} = m', \quad \frac{x}{\bar{x}} \qquad -$$

We then find

$$\begin{aligned}\frac{mm' + m + nn' + n}{a} &= \frac{mm' + m' + nn' + n'}{b} \\ = \frac{mm' + m}{ap} &= \frac{mm' + m'}{bq} \\ = mm' + m + m' + nn' + n + n' + 1.&\end{aligned}$$

Also,

$$\text{Prob. } xy = \frac{mm' + nn'}{mm' + m + m' + nn' + n + n' + 1}.$$

These equations may be reduced to the form

$$\begin{aligned}\frac{mm' + m}{ap} = \frac{mm' + m'}{bq} = \frac{nn' + n}{a(1-p)} &= \frac{nn' + n'}{b(1-q)} \\ = (m+1)(m'+1) + (n+1)(n'+1) - 1.&\end{aligned}$$

$$\text{Prob. } xy = \frac{mm' + nn'}{(m+1)(m'+1) + (n+1)(n'+1) - 1}.$$

Now assume

$$(m+1)(m'+1) = \frac{\mu}{\nu + \mu - 1}, \quad (n+1)(n'+1) = \frac{\nu}{\nu + \mu - 1}. \tag{2}$$

Then since $mm' + m = \dfrac{m(m'+1)(m+1)}{m+1} = \dfrac{m\mu}{(m+1)(\nu+\mu-1)}$, and so on for the other numerators of the system, we find, on substituting and multiplying each member of the system by $\nu + \mu - 1$, the following results:

$$\frac{m\mu}{(m+1)ap} = \frac{m'\mu}{(m'+1)bq} = \frac{n\nu}{(n+1)a(1-p)} = \frac{n'\nu}{(n'+1)b(1-q)} = 1.$$

$$\text{Prob. } xy = (mm' + nn')(\nu + \mu - 1). \tag{3}$$

由上述系统我们得到

$$\frac{m}{m+1} = \frac{ap}{\mu}, \text{ whence } m = \frac{ap}{\mu - ap}.$$

类似地

$$m' = \frac{bq}{\mu - bq}, \quad n = \frac{a(1-p)}{\nu - a(1-p)}, \quad n' = \frac{b(1-q)}{\nu - b(1-q)}.$$

Hence

$$m+1 = \frac{\mu}{\mu - ap}, \quad n+1 = \frac{\nu}{\nu - a(1-p), \text{ \&c.}}$$

Substitute these values in (2) reduced to the form

$$\nu + \mu - 1 = \frac{\mu}{(m+1)(m'+1)} = \frac{\nu}{(n+1)(n'+1)},$$

并且我们有

$$\nu + \mu - 1 = \frac{(\mu - ap)(\mu - bq)}{\mu} = \frac{\{\nu - a(1-p)\}\{\nu - b(1-q)\}}{\nu}, \tag{4}$$

又用(3)中的值代替 m、m′等等，我们便有

$$\begin{aligned} &\text{Prob. } xy \\ &= \left[\frac{abpq}{(\mu - ap)(\mu - bq)} + \frac{ab(1-p)(1-q)}{\{\nu - a(1-p)\}\{\nu - b(1-q)\}}\right](\nu + \mu - 1) \\ &= \frac{abpq}{\mu} + \frac{ab(1-p)(1-q)}{\nu} \text{ by (4).} \end{aligned}$$

现在系统(4)的第一个方程给出

$$\nu + \mu - 1 = \mu - ap - bq + \frac{apbq}{\mu}, \tag{5}$$

$$\therefore \frac{apbq}{\mu} = \nu - 1 + ap + bq.$$

Similarly,

$$\frac{ab(1-p)(1-q)}{\nu} = \mu - 1 + a(1-p) + b(1-q).$$

Adding these equations together, and observing that the first member of the result becomes identical with the expression just found for Prob. xy, we have

$$\text{Prob. } xy = \nu + \mu + a + b - 2.$$

Let us represent Prob. xy by u, and let $a + b - 2 = m$, then

$$\mu + \nu = u - m. \tag{6}$$

再次，由(5)我们得到

$$\mu\nu = abpq - (ap + bq - 1)\mu. \tag{7}$$

同样地，由(4)的第一和第三项相等，我们得到

$$\mu\nu = ab(1-p)(1-q) - \{a(1-p) + b(1-q) - 1\}\nu.$$

Let us represent $ap + bq - 1$ by h, and $a(1-p) + b(1-q) - 1$ by h'. We find on equating the above values of $\mu\nu$,

$$\begin{aligned} h\mu - h'\nu &= ab\{pq + (1-p)(1-q)\} \\ &= ab(p + q - 1). \end{aligned}$$

Let $ab(p + q - 1) = l$, then

$$h\mu - h'\nu = l. \tag{8}$$

Now from (6) and (8) we get

$$\mu = \frac{h'(u-m) + l}{m}, \quad \nu = \frac{h(u-m) - l}{m}.$$

将这些值代入化简为(7)式的形式

$$\mu(\nu + h) = abpq,$$

and we have

$$(hu - l)\{h'(u-m) + l\} = abpqm^2, \tag{9}$$

a quadratic equation, the solution of which determines u, the value of Prob. xy sought.

The solution may readily be put in the form

$$h = \frac{lh' + h(h'm - l) \pm \sqrt{[\{lh' - h(h'm - l)\}^2 + 4hh'abpqm^2]}}{2hh'}.$$

但如果我们进一步观察到

$$lh' - h(h'm - l) = l(h + h') - hh'm = (1 - hh')m,$$

因为

$$h = ap + bq - 1, \quad h' = a(1-p) + b(1-q) - 1,$$

由此

$$h + h' = a + b - 2 = m,$$

我们求得

$$\text{Prob. } xy = \frac{lh' + h(h'm - l) \pm m\sqrt{\{(l - hh')^2 + 4hh'abpq\}}}{2hh'}. \tag{10}$$

尚待确定必须给根号以何种符号。我们可以通过上一问题中所例示的一般方法来确定这一点，但这是

容易得多，而且在当前情形下完全足够，即通过将上述公式与某个已知情形所特有的结果进行比较来确定符号。例如，如果确定事件 A 总是发生，而事件 B 从不与事件 E 相关联，那么确定事件 A 和 B 从不合取。因此，如果 p = 1,q = 0，我们应当有 u = 0。现在假设 p = 1,q = 0，给出

$$h = a - 1, \quad h' = b - 1, \quad l = 0, \quad m = a + b - 2.$$

代入(10)得

$$\text{Prob. } xy = \frac{(a-1)(b-1)(a+b-2) \pm (a+b-2)(a-1)(b-1)}{2(a-1)(b-1)},$$

并且[3]当取下方符号时此表达式消失。因此一般问题的最终解将表示为如下形式

$$\frac{\text{Prob. } xy}{\text{Prob. } x} = \frac{lh' + h(h'm - l) - m\sqrt{\{(l - hh')^2 + 4hh'abpq\}}}{2ahh'},$$

$$\text{wherein } h = ap + bq - 1, \quad h' = a(1-p) + b(1-q) - 1,$$

$$l = ab(p + q - 1), \quad m = a + b - 2.$$

由于最终逻辑解中受系数[10]arethe影响的项与本章第一问题中的相同，常数之间的条件也将相同，即，

$$ap \overset{=}{<} 1 - b(1-q), \quad bq \overset{=}{<} 1 - a(1-p).$$

7. 上述解之正确性的一个确证是，所得表达式关于两组量 p、q 与 1 – p、1 – q 是对称的，也就是说，将 p 变为 1 – p，将 q 变为 1 – q 时，该表达式不变。这从方程

$$\text{Prob. } xy = ab\left\{\frac{pq}{\mu} + \frac{(1-p)(1-q)}{\nu}\right\}$$

用于推导最终结果。现在，如果存在事件 E 的概率 p、q，作为已知 A 和 B 发生的结果，那么就存在相反事件的概率 1 – p、1 – q，即在同样情况下 E 不发生。那么，由于无论我们在数据中考虑 E 的发生还是不发生，数据在形式上都不变，显然解应当是，正如它确实是，p、q 和 1 – p、1 – q 的对称函数。

---

3 分子原为“(a – 1) b – 1)(a + b – 2) ...”，于2004年由 Distributed Proofreaders 修正。

让我们考察 p = 1,q = 1 这一特例。我们得到

$$h = a + b - 1, \quad h' = -1, \quad l = ab, \quad m = a + b - 2,$$

并代入

$$\frac{\text{Prob. } xy}{\text{Prob. } x} = \frac{-ab + (a+b-1)(2-a-b-ab) - (a+b-2)(ab-a-b+1)}{-2a(a+b-1)}$$
$$= \frac{-2ab(a+b-1)}{-2a(a+b-1)} = b.$$

那么，在这种情况下，事件A和B似乎是彼此独立的。假设它们与某个其他事件E不变地相关联，而关于该事件发生的频率，除了可能从这种特定联系中推断出来的以外，绝对一无所知，这并不在事件A和B本身之间建立任何依赖关系。我认为这个结论是合乎理性的，尽管具体的例子乍看之下可能表明不同的结果。例如，如果抛上岸的、第一，某种特定杂草，第二，海滨某种类型的植虫的概率，已经被分别确定，并且如果也已经查明，除非在暴风雨引起的波浪激荡期间，这些事件中的任何一个都不可能发生，那么我认为，可以正当地得出结论说，所讨论的事件不是独立的。据推测，捡到一块所设想的那种海藻，会使发现植虫比否则更为可能。但我认为，这一事实是由于我们对另一情况的知识，而该情况并未隐含在问题的实际条件中，即暴风雨的发生只是一种偶发现象。让观察的范围局限于一个总是受风暴困扰的海洋。那么我设想，就会看出，杂草和植虫的抛上岸应当被视为独立的事件。现在，更一般地说，存在一切现象所共有的条件--人们感到这些条件并不影响它们的相互独立。因此我认为，该解表明，当一个特定条件贯穿于我们的有记录的经验之全部时，它就参照该经验所延伸于其上的那类现象而具有上述性质。

8. 问题 IV。--为了在某种程度上说明上述观察，除上一问题的数据之外，再给出事件 E 的绝对概率，完整的数据系统为

$$\text{Prob. } x = a, \quad \text{Prob. } y = b, \quad \text{Prob. } z = c,$$
$$\text{Prob. } xz = ap, \quad \text{Prob. } yz = bq,$$

并设要求求出 Prob .xy。

Assuming, as before, $xz = s$, $yz = t$, $xy = w$, the final logical equation is

$$w = xystz + xy\bar{s}\bar{t}\bar{z} + 0(x\bar{y}s\bar{t}z + \bar{x}y\bar{s}tz + x\bar{y}\bar{z}\bar{s}\bar{t} + xy\bar{z}\bar{s}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}z\bar{s}\bar{t} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{s}\bar{t})$$

+ 系数为[1]的项 0.

代数系统一经形成，随后的消元便可借上一问题中所采用的变换而简化。最终结果为

result is

$$\text{Prob.}\, xy = ab\left\{\frac{pq}{c} + \frac{(1-p)(1-q)}{1-c}\right\}. \tag{2}$$

The conditions among the constants are

$$c \overset{=}{>} ap, \quad c \overset{=}{>} bq, \quad c \overset{=}{<} 1 - a(1-p), \quad c \overset{=}{<} 1 - b(1-q).$$

现在若 p = 1,q = 1，我们求得

$$\text{Prob.}\, xy = \frac{ab}{c},$$

c 不容有任何小于 a 或 b 的值。由此可知，若已知事件 E 是*occasional*的，则它伴随事件 x 和 y 的恒定出现*increases*它们合取的概率，其比例为其自身频率的倒数。公式(2)可在大量情形中得到验证。作为一个特例，令 q = c，我们得到

$$\text{Prob.}\, xy = ab. \tag{3}$$

现在，假设 q = c 依定义(第十六章)蕴含事件 B 与 E 的独立性。那么，若 B 与 E 独立，则 A 与 E 之间可能存在的任何关系都不能建立 A 与 B 之间的关系；因此 A 与 B 也是独立的，正如上述方程(3)所蕴含的。

It may readily be shown from (2) that the value of Prob. z, which renders Prob. xy a minimum, is

$$\text{Prob.}\, z = \frac{\sqrt{(pq)}}{\sqrt{(pq)} + \sqrt{(1-p)(1-q)}}.$$

If $p = q$, this gives

$$\text{Prob.}\, z = p;$$

一个结果，其正确性可以通过应用于(3)的同样考虑来表明。

问题V。--给定任意三个事件的概率，以及它们合取的概率；要求其中任意两个的合取的概率。

假设数据为

$$\text{Prob.}\, x = p, \quad \text{Prob.}\, y = q, \quad \text{Prob.}\, z = r, \quad \text{Prob.}\, xyz = m,$$

而所求为 Prob .xy。

假设 xyz = s,xy = t，我们得到最终的逻辑方程，

$$t = xyzs + xy\bar{z}\bar{s} + 0(x\bar{y}\bar{s} + \bar{x}\bar{s}) + \frac{1}{0}(\text{sum of all other constituents});$$

由此，最终，

$$\text{Prob. } xy = \frac{H - \sqrt{(H^2 - 4pq\bar{r}^2 - 4\bar{p}\bar{q}\bar{r}m)}}{2\bar{r}},$$

wherein

$$\bar{p} = 1 - p, \ \&\text{c.} \quad H = \bar{p}\bar{q} + (p + q)\bar{r}.$$

This admits of verification when $p = 1$, when $q = 1$, when $r = 0$, and therefore $m = 0$, &c.

Had the condition, Prob. $z = r$, been omitted, the solution would still have been definite. We should have had

$$\text{Prob. } xy = \frac{pq(1 - m) + (1 - p)(1 - q)m}{1 - m};$$

and it may be added, as a final confirmation of their correctness, that the above results become identical when $m = pqr$.

9. The following problem is a generalization of Problem I., and its solution, though necessarily more complex, is obtained by a similar analysis.

问题 VI.- 如果一个事件只能作为某些原因A 1 , A 2 , ...A n中的一个或多个的结果而发生，并且如果一般地c i表示原因A i的概率，而p i表示如果原因A i存在，事件E将发生的概率，那么，在c i和p i的一系列值已给定的情况下，求事件E的概率。[4]

Let the causes $A_1, A_2, \ldots A_n$ be represented by $x_1, x_2, \ldots x_n$, and the event E by z.

Then we have generally,

$$\text{Prob. } x_i = c_i, \qquad \text{Prob. } x_i z = c_i p_i.$$

4 或许应当指出，上述问题是由作者于1851年11月在《剑桥与都柏林数学杂志》上提请数学家们注意的，并附有以下评述：

“经过深思熟虑之后，使我针对这个问题采取一种在当今不寻常、且没有充分理由不应重新启用的做法的动机如下：--第一，我提出这个问题作为对公认方法之充分性的一种检验。第二，我预期它的讨论将在某种程度上增进我们对纯分析一个重要分支的知识。然而，我仅希望以第一条理由作为我的辩解依据。

“虽然我希望或许能找到一些人，他们不偏离先前研究的路线，却认为这个问题值得关注，但我完全否认它是作为对个人技巧或知识的考验而提出的想法，而是希望它仅参照那些公共的和科学的目的来加以看待，仅仅为了这些目的它才被提出。”

作者认为应当补充说明，上述问题的发表引起了一些有趣的私人通信，但并未引出一个解答。

此外，E 只能与原因 A 1 , A 2 , ...A n 中的某一个或多个相关联而发生这一条件，确立了逻辑条件，

$$z(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)=0. \tag{1}$$

现在让我们一般地假设

$$x_i z = t_i,$$

可化简为以下形式

$$x_i z(1-t_i)+t_i(1-x_i z)=0,$$

构成一个 n 方程系统的类型，这些方程连同(1)一起表达了该问题的逻辑条件。将所有这些方程相加，正如在先前约化之后我们被允许做的那样，我们得到

$$\sum\{x_i z(1-t_i)+t_i(1-x_i z)\}+z(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)=0, \tag{2}$$

(P所隐含的求和从 i = 1 延伸到 i = n)，以及这个单一且充分的逻辑方程，连同由一般方程所表示的 2 n 个数据，

$$\text{Prob. } x_i=c_i, \quad \text{Prob. } t_i=c_i p_i, \tag{3}$$

构成我们据以确定 Prob.z 的元素。

设(2)按z展开。我们有

$$\left[\sum\{x_i(1-t_i)+t_i(1-x_i)\}+(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)\right]z + \sum t_i(1-z)=0,$$

由此nce

$$z=\frac{\sum t_i}{\sum t_i-\sum\{x_i(1-t_i)+t_i(1-x_i)\}-(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)}. \tag{4}$$

Now any constituent in the expansion of the second member of the above equation will consist of $2n$ factors, of which n are taken out of the set $x_1, x_2, \dots x_n, 1-x_1, 1-x_2, \dots 1-x_n$, and n out of the set $t_1, t_2, \dots t_n, 1-t_1, 1-t_2 \dots 1-t_n$, no such combination as $x_1(1-x_1), t_1(1-t_1)$, being admissible. Let us consider first those constituents of which $(1-t_1),(1-t_2)\dots(1-t_n)$ forms the t-factor, that is the factor derived from the set $t_1, \dots 1-t_1$.

The coefficient of any such constituent will be found by changing $t_1, t_2, \dots t_n$ respectively into 0 in the second member of (4), and then assigning to $x_1, x_2, \dots x_n$ their values as dependent upon the nature of the x-factor of the constituent. Now simply substituting for $t_1, t_2, \dots t_n$ the value 0, the second member becomes

$$\frac{0}{-\sum x_i-(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)},$$

并且无论我们随后给x ^{1} , x ^{2} , ...x n指定什么值，0、1，它都消失。因为如果那些值不全都等于0，则项^{P} x i不消失，而如果它们全都等于0，则项–(1 – x ^{1}) ...(1 – x n)变为– 1，以致在任一情况下分母都不消失，因而该分数消失。因此，以(1 – t ^{1}) ...(1 – t n)为因子的所有成分的系数都将为0，并且由于一切可能的x - 成分之和为1，所以在z的展开式中将有一个总项0(1 – t ^{1}) ...(1 – t n)。

Consider, in the next place, any constituent of which the t-factor is $t_1\, t_2 \ldots t_r(1-t_{r+1}) \ldots (1-t_n)$, r being equal to or greater than unity. Making in the second member of (4), $t_1 = 1, \ldots t_r = 1, t_{r+1} = 0, \ldots t_n = 0$, we get the expression

$$\frac{r}{x_1 \ldots + x_r - x_{r+1} \ldots - x_n - (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)}$$

现在，既然这些记号唯一可容许的值是0和1，那么显然，当x ^{1} = 1 ...x r = 1 , x r $^{+1}$ = 0 , ...x n = 0时，上述表达式将等于1，而对于所有其他值组合，该表达式将取大于1的值。因此，系数1将被赋予最终展开式中所有具有以下形式的成分

$$x_1 \ldots x_r(1-x_{r+1}) \ldots (1-x_n)\, t_1 \ldots t_r(1-t_{r+1}) \ldots (1-t_n),$$

x - 因子类似于 t - 因子，而包含在当前情形下的其他成分将具有虚拟系数[10].此外，这是显然的,这个推理独立于各个记号的特定排列和顺序。

因此，z 的完全展开将具有如下形式

$$z = \sum(XT) + 0(1-t_1)(1-t_2)\ldots(1-t_n) + \text{ constituents whose coefficients are } \frac{1}{0}, \quad (5)$$

其中 T 表示除(1 – t ^{1}) ...(1 – t n) 之外的任一 t - 成分，而 X 表示 x ^{1} ...x n 的相应或类似成分。例如，若 n = 2，我们将有

$$\sum(XT) = x_1x_2t_1t_2 + x_1\bar{x}_2t_1\bar{t}_2 + \bar{x}_1x_2\bar{t}_1t_2,$$

$\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, &c. standing for $1-x_1$, $1-x_2$, &c.; whence

$$\begin{aligned} z = {} & x_1x_2t_1t_2 + x_1\bar{x}_2t_1\bar{t}_2 + \bar{x}_1x_2\bar{t}_1t_2 \\ & + 0(x_1x_2\bar{t}_1\bar{t}_2 + x_1\bar{x}_2\bar{t}_1\bar{t}_2 + \bar{x}_1x_2\bar{t}_1\bar{t}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{t}_1\bar{t}_2) \\ & + \text{ constituents whose coefficients are } \frac{1}{0}. \end{aligned} \quad (6)$$

这个结果，在允许记号差异的情况下，与本章问题I中 z 的展开形式一致，正如它显然应当如此。

10. 为避免复杂化，我打算从上述方程(6)推导出确定 Prob .z 的必要条件，针对 n = 2 的特殊情形，以这样一种形式，使我们能够通过在思想上沿同一研究路线推进，为 n 具有任意整数值的更为一般的情形指定相应的条件。

假设 n = 2，则有

$$V = x_1x_2t_1t_2 + x_1\bar{x}_2t_1\bar{t}_2 + \bar{x}_1x_2\bar{t}_1t_2 + x_1x_2\bar{t}_1\bar{t}_2 + x_1\bar{x}_2\bar{t}_1\bar{t}_2 + \bar{x}_1x_2\bar{t}_1\bar{t}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{t}_1\bar{t}_2.$$

$$\text{Prob. } z = \frac{x_1x_2t_1t_2 + x_1\bar{x}_2t_1\bar{t}_2 + \bar{x}_1x_2\bar{t}_1t_2}{V},$$

确定 x^1、t^1等的条件为

$$\frac{x_1x_2t_1t_2 + x_1\bar{x}_2t_1\bar{t}_2 + x_1x_2\bar{t}_1\bar{t}_2 + x_1\bar{x}_2\bar{t}_1\bar{t}_2}{c_1} = \frac{x_1x_2t_1t_2 + \bar{x}_1x_2\bar{t}_1t_2 + x_1x_2\bar{t}_1\bar{t}_2 + \bar{x}_1x_2\bar{t}_1\bar{t}_2}{c_2} = \frac{x_1x_2t_1t_2 + x_1\bar{x}_2t_1\bar{t}_2}{c_1p_1} = \frac{x_1x_2t_1t_2 + \bar{x}_1x_2\bar{t}_1t_2}{c_2p_2} = V.$$

将这个方程组的各项除以 $x^{1-}x^{2-}t^{1-}t^2$，并将 Prob .z 的分子和分母除以同一量，且在结果中假设

$$\frac{x_1t_1}{\bar{x}_1\bar{t}_1} = m_1, \quad \frac{x_2t_2}{\bar{x}_2\bar{t}_2} = m_2, \quad \frac{x_1}{\bar{x}_1} = n_1, \quad \frac{x_2}{\bar{x}_2} = n_2; \tag{7}$$

我们求得

$$\text{Prob. } z = \frac{m_1m_2 + m_1 + m_2}{m_1m_2 + m_1 + m_2 + n_1n_2 + n_1 + n_2 + 1},$$

$$\text{and } \frac{m_1m_2 + m_1 + n_1n_2 + n_1}{c_1} = \frac{m_1m_2 + m_2 + n_1n_2 + n_2}{c_2} = \frac{m_1m_2 + m_1}{c_1p_1} + \frac{m_1m_2 + m_2}{c_2p_2} = m_1m_2 + m_1 + m_2 + n_1n_2 + n_1 + n_2 + 1, \tag{8}$$

由此，如果我们假设，

$$(m_1 + 1)(m_2 + 1) = M, \quad (n_1 + 1)(n_2 + 1) = N, \tag{9}$$

经过略微化简，我们有，

$$\text{Prob. } z = \frac{M - 1}{M + N - 1},$$

$$\frac{n_1(n_2 + 1)}{c_1(1 - p_1)} = \frac{n_2(n_1 + 1)}{c_2(1 - p_2)} = \frac{m_1(m_2 + 1)}{c_1p_1} = \frac{m_2(m_1 + 1)}{c_2p_2} = M + N - 1;$$

或者，

$$\frac{m_1 M}{(m_1+1)c_1 p_1} = \frac{m_2 M}{(m_2+1)c_2 p_2} = \frac{n_1 N}{(n_1+1)c_1(1-p_1)} = \frac{n_2 N}{(n_2+1)c_2(1-p_2)} = M + N - 1.$$

现在让我们在思想上对最终逻辑方程(5)进行一系列类似的变换和约化。我们将得到确定 Prob .z 的如下表达式：

$$\text{Prob. } z = \frac{M-1}{M+N-1} \tag{10}$$

其中

$$M = (m_1+1)(m_2+1)\dots(m_n+1),$$
$$N = (n_1+1)(n_2+1)\dots(n_n+1),$$

$m_1, \dots, m_n, n_1, \dots, n_n$, being given by the system of equations,

$$\frac{m_1 M}{(m_1+1)c_1 p_1} = \frac{m_2 M}{(m_2+1)c_2 p_2} \dots = \frac{m_n M}{(m_n+1)c_n p_n} = \frac{n_1 N}{(n_1+1)c_1(1-p_1)} \dots = \frac{n_n N}{(n_n+1)c_n(1-p_n)} = M + N - 1. \tag{11}$$

为进一步简化结果，假设

$$\frac{M+N-1}{M} = \frac{1}{\mu}, \quad \frac{M+N-1}{N} = \frac{1}{\nu};$$

whence

$$M = \frac{\mu}{\mu+\nu-1}, \quad N = \frac{\nu}{\mu+\nu-1}.$$

We find

$$\frac{m_1}{(m_1+1)c_1 p_1} = \frac{m_2}{(m_2+1)c_2 p_2} \dots = \frac{m_n}{(m_n+1)c_n p_n} = \frac{1}{\mu},$$
$$\frac{n_1}{(n_1+1)c_1(1-p_1)} = \frac{n_2}{(n_2+1)c_2(1-p_2)} \dots = \frac{n_n}{(n_n+1)c_n(1-p_n)} = \frac{1}{\nu};$$

whence

$$m_1 = \frac{c_1 p_1}{\mu - c_1 p_1}, \dots m_n = \frac{c_n p_n}{\mu - c_n p_n};$$

and finally,

$$m_1 + 1 = \frac{\mu}{\mu - c_1 p_1}, \dots m_n + 1 = \frac{\mu}{\mu - c_n p_n},$$
$$n_1 + 1 = \frac{\nu}{\nu - c_1(1-p_1)}, \dots n_n + 1 = \frac{\nu}{\nu - c_n(1-p_n)}.$$

将这些值用(9)中的M和N的值替换，我们得到

$$\frac{\mu^n}{(\mu - c_1p_1)(\mu - c_2p_2)\dots(\mu - c_np_n)} = \frac{\mu}{\mu + \nu - 1},$$
$$\frac{\nu^n}{\{\nu - c_1(1-p_1)\}\{\nu - c_2(1-p_2)\}\dots\{\nu - c_n(1-p_n)\}} = \frac{\nu}{\mu + \nu - 1},$$

可化简为对称形式

$$\begin{aligned}\mu + \nu - 1 &= \frac{(\mu - c_1p_1)\dots(\mu - c_np_n)}{\mu^{n-1}} \\ &= \frac{\{\nu - c_1(1-p_1)\}\dots\{\nu - c_n(1-p_n)\}}{\nu^{n-1}}.\end{aligned} \tag{12}$$

Finally,

$$\text{Prob. } z = \frac{M-1}{M+N-1} = 1 - \nu. \tag{13}$$

Let us then assume $1 - \nu = u$, we have then

$$\begin{aligned}\mu - u &= \frac{(\mu - c_1p_1)\dots(\mu - c_np_n)}{\mu^{n-1}} \\ &= \frac{\{1 - c_1(1-p_1)\}\dots\{1 - c_n(1-p_n) - u\}}{(1-u)^{n-1}}.\end{aligned}$$

If we make for simplicity

$$c_1p_1 = a_1, \quad c_np_n = a_n, \quad 1 - c_1(1-p_1) = b_1, \text{ \&c.},$$

上述方程可写为如下形式：

$$\mu - u = \frac{(\mu - a_1)\dots(\mu - a_n)}{\mu^{n-1}}, \tag{14}$$

其中

$$\mu = u + \frac{(b_1 - u)\dots(b_n - u)}{(1-u)^{n-1}}. \tag{15}$$

将这个μ的值代入(14)将给出一个只涉及u的方程，其解将确定Prob .z，因为由(13) Prob .z = u。剩下的是确定u的界限。

11. 现在，在 n = 2(XIX.12)的特殊情形中用以确定界限的同一分析，在目前情形下把我们引向以下结果。量 u，为了它能够表示 Prob .z 的值，必须以下列各量为它的下界：a ^{1} , a ^{2} , ...a n，并以下列各量为它的上界：b ^{1} , b ^{2} , ...b n,a ^{1} + a ^{2} ...+ a n。我们由此可以`*a priori*推断，方程(14)将始终存在一个根，而且只有一个根，满足这些条件。我认为，为了实际验证，只需证明在界限 a ^{1} , a ^{2} , ...a n 与 b ^{1} , b ^{2} , ...b n 之间，方程(14)将存在一个、而且只有一个根，便足够了。

首先，让我们考虑在(15)中 μ 所经受的变化的性质，当 u 从 a_1(我们将假定它是其较小界限中的最大者)变到 b_1(我们将假定它是其较大界限中的最小者)时。当 $u = a_1$时，显然 μ 为正且大于 a_1。当 $u = b_1$时，我们有 $\mu = b_1$，它也为正。在界限 $u = a_1$、$u = b_1$之间，可以证明 μ 随 u 增大。于是我们有

$$\frac{d\mu}{du} = 1 - \frac{(b_2-u)\dots(b_n-u)}{(1-u)^{n-1}} - \frac{(b_1-u)(b_3-u)\dots(b_n-u)}{(1-u)^{n-1}}\dots + (n-1)\frac{(b_1-u)(b_2-u)\dots(b_n-u)}{(1-u)^n}. \tag{16}$$

Now let

$$\frac{b_1-u}{1-u} = x_1 \dots \frac{b_n-u}{1-u} = x_n.$$

Evidently $x_1, x_2, \dots x_n$, will be proper fractions, and we have

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{du} &= 1 - x_2x_3\dots x_n - x_1x_3\dots x_n \dots - x_1x_2\dots x_{n-1} + (n-1)x_1x_2\dots x_n \\ &= 1 - (1-x_1)x_2x_3\dots x_n - x_1(1-x_2)x_3\dots x_n \dots \\ &\quad -x_1x_2\dots x_{n-1}(1-x_n) - x_1x_2\dots x_n.\end{aligned}$$

现在第二项中的否定项(如果我们可以借用逻辑展开式的语言)是由分数$x_1, x_2, \dots x_n$构成的成分。因此它们的和不能超过1；由此$\frac{d\mu}{du}$为正，且μ在指定界限之间随u增大而增大。

现在令(14)写成如下形式

$$\frac{(\mu-a_1)\dots(\mu-a_n)}{\mu^{n-1}} - (\mu-u) = 0, \tag{17}$$

并假设 $u = a_1$。第一个成员变为

$$(\mu-a_1)\left\{\frac{(\mu-a_2)\dots(\mu-a_n)}{\mu^{n-1}} - 1\right\}, \tag{18}$$

且这个表达式的值为负。因为，在(15)中作同样的假设，我们得到

$$\mu - a_1 = \frac{(b_1-u)\dots(b_n-u)}{(1-u)^{n-1}} = \text{ a positive quantity.}$$

At the same time we have

$$\frac{(\mu-a_2)\dots(\mu-a_n)}{\mu^{n-1}} = \frac{\mu-a_2}{\mu}\dots\frac{\mu-a_n}{\mu},$$

且由于第二项的因子是正分数，该项小于1，因此(18)为负。所以假设 $u = a_1$使*(17)*的第一项为负。

其次，令u = b 1，则由(15) μ = u = b 1，且(17)的第一项变为正。

最后，在界限u = a 1和u = b 1之间，(17)的第一项连续增大。因为该表达式写成如下形式的第一项

$$(\mu - a_1)\frac{\mu - a_1}{\mu} \dots \frac{\mu - a_n}{\mu}$$

增大，因为μ增大，且随之所含的每个因子都增大。又，否定项μ – u随u的增大而减小，这从其由(15)推出的值可以看出，即，

$$\frac{(b_1 - u) \dots (b_n - u)}{(1 - u)^{n-1}}.$$

因此，在界限u = a 1,u = b 1之间，(17)的第一项连续增大，在此过程中从负值变为正值。所以，在指定的界限之间，存在一个u的值，且只有一个，使所述方程得到满足。

12. 将这些结果汇集在一起，我们得到一般问题的如下解。

事件E的概率将是从方程中推得的u的那个值

$$\mu - u = \frac{(\mu - c_1 p_1) \dots (\mu - c_n p_n)}{\mu^{n-1}}, \tag{19}$$

wherein

$$\mu = u + \frac{\{1 - c_1(1 - p_1) - u\} \dots \{1 - c_n(1 - p_n) - u\}}{(1 - u)^{n-1}},$$

which (value) lies between the two sets of quantities,

$$c_1 p_1, c_2 p_2, \dots, c_n p_n \text{ and } 1 - c_1(1 - p_1), 1 - c_2(1 - p_2) \dots 1 - c_n(1 - p_n),$$

前一组是它的下极限，后一组是它的上极限。

且在一般情形下还可以推断，正如在n = 2的特殊情形中已证明的那样，如上确定的u的值不会超过量

$$c_1 p_1 + c_2 p_2 \dots + c_n p_n.$$

13. 后附有具体的验证。

第一。设 p 1 = 1 , p 2 = 1 , ...p n = 1。这是要假定：若事件 A 1 , A 2 ...A n 中任何一个发生，则事件 E 必发生，这是确定的。于是，在此情形下，E 发生的概率就简单地是事件或原因 A 1 , A 2 ...A n 并非全部不发生这一情形的概率，因此其表达式将为 1 –(1 – c 1)(1 – c 2) ...(1 – c n)。

现在通解(19)给出

$$\mu - u = \frac{(\mu - c_1) \dots (\mu - c_n)}{\mu^{n-1}},$$

其中

$$\mu = u + \frac{(1-u)^n}{(1-u)^{n-1}} = 1.$$

因此，

$$1 - u = (1 - c_1) \dots (1 - c_n),$$
$$\therefore u = 1 - (1 - c_1) \dots (1 - c_n),$$

等价于上文`*a priori*的确定。

第二，令p ^{1} = 0,p ^{2} = 0,p n = 0，则(19)给出

$$\mu - u = \mu,$$
$$\therefore u = 0,$$

正如它显然应当如此。

第三，令c ^{1} , c ^{2} ...c n为小量，使得它们的平方和乘积可以忽略。然后展开方程(19)的第二项，

$$\mu - u = \frac{\mu^n - (c_1p_1 + c_2p_2 \dots + c_np_n)\mu^{n-1}}{\mu^{n-1}}$$
$$= \mu - (c_1p_1 + c_2p_2 \dots + c_np_n),$$
$$\therefore u = c_1p_1 + c_2p_2 \dots + c_np_n.$$

现在这就是如果原因A ^{1} , A ^{2} ...A n互斥时解将会是的样子。但这些原因的概率越小，它们就越接近互斥的条件，因为它们之间任何同时发生的概率越小。因此，上面得到的结果无疑将是E的概率表达式的极限形式。

第四，在n = 2的特殊情形中，我们可以容易地从一般解中消去μ。结果是

$$\frac{(u - c_1p_1)(u - c_2p_2)}{c_1p_1 + c_2p_2 - u} = \frac{\{1 - c_1(1 - p_1) - u\}\{1 - c_2(1 - p_2) - u\}}{1 - u},$$

which agrees with the particular solution before obtained for this case, Problem I.

虽然通过系统(19)，解一般依赖于一个高阶方程的解，其实际困难不会很大。因为关于界限的条件使我们能够立即选出一个接近的u值，且系统(19)的形式适合于逐次逼近的过程。

14. 问题7。--数据与上一问题相同，要求的是：如果原因A ^{1} , A ^{2} , ...A n的任何确定的给定组合出现，则事件E将实现的概率。

情形A ^{1} , A ^{2} , ...A n，如前分别用x ^{1} , x ^{2} , ...x n表示，令问题陈述中提到的它们的确定组合

用φ(x 1 , x 2 ...x n)表示，使得该组合的实际出现将由逻辑方程表达，

$$\phi(x_1, x_2, \ldots x_n) = 1.$$

数据是

$$\begin{aligned} &\text{Prob. } x_1 = c_1, \ldots \qquad \text{Prob. } x_n = c_n, \\ &\text{Prob. } x_1 z = c_1 p_1, \qquad \text{Prob. } x_n z = c_n p_n; \end{aligned} \tag{1}$$

而研究的对象是

$$\frac{\text{Prob. } \phi(x_1, x_2 \ldots x_n) z}{\text{Prob. } \phi(x_1, x_2 \ldots x_n)}. \tag{2}$$

我们先求分子的值。

让我们假设，

$$x_1 z = t_1 \ldots x_n z = t_n, \tag{3}$$
$$\phi(x_1, x_2 \ldots x_n) z = w. \tag{4}$$

或者，为简单起见，若将φ(x 1 , x 2 ...x n)表示为φ，则最后一个方程将是

$$\phi z = w, \tag{5}$$

必须加上方程

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n z = 0. \tag{6}$$

现在系统(3)的任何方程x r z = t r都可以化为形式

$$x_r z \bar{t}_r + t_r (1 - x_r z) = 0.$$

类似地化简(5)，并将不同结果相加，我们得到逻辑方程

$$\Sigma\{x_r z \bar{t}_r + t_r (1 - x_r z)\} + \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n z + \phi z \bar{w} + w(1 - \phi z) = 0, \tag{7}$$

from which z being eliminated, w must be determined as a developed logical function of $x_1, \ldots x_n, t_1, \ldots t_n$.

Now making successively $z = 1, z = 0$ in the above equation, and multiplying the results together, we have

$$\{\Sigma(x_r \bar{t}_r + \bar{x}_r t_r) + \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n + \phi \bar{w} + w \bar{\phi}\} \times (\Sigma t_r + w) = 0.$$

关于w展开这个方程，并在结果中按照第ix章命题i，将P t r +1替换为1，我们有

$$Ew + E'(1 - w) = 0;$$

其中

$$E = \Sigma(x_r\bar{t}_r + t_r\bar{x}_r) + \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n + \bar{\phi},$$
$$E' = \Sigma t_r\{\Sigma(x_r\bar{t}_r + t_r\bar{x}_r) + \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n + \phi\}.$$

因此

$$w = \frac{E'}{E' - E}. \tag{8}$$

我们现在必须就记号 x 1 , x 2 , ...x n , t 1 , t 2 , ...t n 的双重级数展开此方程的第二边。为实现这一目标，最方便的做法是把所得展开式的成分分为三个不同的类，并分别确定适于这些类的系数。

首先，让我们考虑那些以 t 1 ... t n为因子的成分。令t 1 = 0 ...t n = 0，我们得到

$$E' = 0, \quad E = \Sigma x_r + \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n + \bar{\phi}.$$

显然，无论给x-记号什么值(0 , 1),E都不消失。因此所有涉及 t 1 ... t n的成分的系数都是0。

其次考虑那些不包含因子 t 1 ... t n 的 constituent，它们关于两组记号 x 1 ...x n 与 t 1 ...t n 是对称的。这里所谓对称的 constituent，是指那些在把 x 1换成 t 1、把 x 2换成 t 2等等，以及*vice versˆa*时保持不变者。constituent x 1 ...x n t 1 ...t n , x 1 ... x n t 1 ... t n 等等，在这个意义上是对称的。对于所有对称的 constituent，显然有

$$\sum(x_r\bar{t}_r + t_r\bar{x}_r)$$

消失。对于那些不涉及 t 1 ... t n的成分，进一步显然 x 1 ... x n也消失，因此

$$E = \bar{\phi} \qquad E' = \Sigma t_r(\phi),$$
$$w = \frac{\sum t_r(\phi)}{\sum t_r(\phi) - \bar{\phi}}.$$

对于那些其 x 因子出现在 φ 中的组成部分，上述方程的第二项变为 1；对于那些其 x 因子出现在 φ 中的组成部分，它变为 0。因此不涉及 t 1 ... t n 的对称组成部分的系数，其 - 因子出现在其中的将为 *1*；其 - 因子不出现在其中的将为 *0*。

最后考虑那些关于两组记号不对称、同时又不涉及 t 1 ... t n的成分。

这里显然，E和E ′都不能消失，因此(8)中w的分数值的分子必须超过分母。所以该值不能用1、0或00表示。那么它在逻辑

展开式中必须用[10]表示。这样的那么将是这一类成分的系数。

15. 因此，将 w 表示为 x [1] , ...x n、t [1] , ...t n 的展开逻辑函数的最终逻辑方程，将具有如下形式

$$w = \sum\nolimits_1 (XT) + 0\{\sum\nolimits_2 (XT) + \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_n\} + \frac{1}{0}(\text{sum of other constituents}), \tag{9}$$

其中 P [1] (XT) 表示其和的所有对称成分的其中该因子 X 出现于 φ 中，而 P [2] (XT) 其和的所有对称成分的其中因子 X 不出现于 φ 中，-- 成分 x [1] ... x n t [1] ... t n，若其出现，则在任一情形下均被舍弃。

从逻辑过渡到代数，可以观察到，在此处以及所有类似情形中，函数 V 借助它形成用于确定 x [1] , ...x n , t [1] ...t n 的值的代数方程组，它独立于所涉及的任何函数 φ 的性质，该函数不在数据的表达中，而在所提问题的所求的表达中。因此我们在本示例中有，

其中

$$\text{Prob. } w = \frac{\sum_1 (XT)}{V},$$

$$V = \sum\nolimits_1 (XT) + \sum\nolimits_2 (XT) + t_1 \ldots \bar{t}_n$$

$$= \sum (XT) + \bar{t}_1 \ldots t_n. \tag{10}$$

这里 P(XT) 表示 x 和 t 记号的所有对称组成部分之和，除了组成部分 x [1] ... x n , t [1] ... t n。这个 V 的值与前一问题的解中实际使用的值相同，因此我们可以利用那里获得的结果。

如果那么，正如所引用的解法中那样，我们假设

$$\frac{x_1 t_1}{\bar{x}_1 \bar{t}_1} = m_1, \quad \frac{x_n t_n}{\bar{x}_n \bar{t}_n} = m_n, \quad \frac{x_1}{\bar{x}_1} = n_1, \ \&\text{c.},$$

我们将得到一个可如此表述的结果：

$$\text{Prob. } w = \frac{M_1}{M + N - 1}, \tag{11}$$

M [1] 由从函数 φ 中剔除成分 x [1] ... x n(若其中存在该成分)而形成，将结果除以同一成分 x [1] ... x n，然后将 x1 x 1变为m1,x2 x 2变为m2,并如此继续。M>与N的值与前一个问题中的相同。回到这些值以及 m [1]、m [2]等的对应值，我们求得 —

$$\text{Prob. } w = M_1(\mu + \nu - 1),$$

the general values of m_r, n_r being

$$m_r = \frac{c_r p_r}{\mu - c_r p_r}, \qquad n_r = \frac{c_r(1 - p_r)}{\mu - c_r(1 - p_r)},$$

而 μ 与 ν 由该方程组的解给出，

$$\mu+\nu-1=\frac{(\mu-c_1p_1)\dots(\mu-c_np_n)}{\mu^{n-1}}=\frac{\{\nu-c_1(1-p_1)\}\dots\{\nu-c_n(1-p_n)\}}{\nu^{n-1}}.$$

上述 Prob.w 的值将是分数(2)的分子。现在尚需确定其分母。

为此，假设

$$\phi(x_1,x_2\dots x_n)=v,$$

或

$$\phi=v;$$

由此

$$\phi\bar{v}+v\bar{\phi}=0.$$

将本方程的第一个成员代入(7)中以代替相应的形式 φz⁻w + w(1 – φz)，我们得到作为原始逻辑方程，

$$\sum\{x_rz\bar{t}_r+t_r(1-x_rz)\}+\bar{x}_1\dots\bar{x}_nz+\phi\bar{v}+v\bar{\phi}=0,$$

由此消去 z，并依第 IX 章命题 II 化简，

$$\phi\bar{v}+v\bar{\phi}+\sum t_r\{\sum(x_r\bar{t}_r+t_r\bar{x}_r)+\bar{x}_1\dots\bar{x}_n\}=0.$$

Hence

$$v=\frac{\phi+\sum t_r\{\sum(x_r\bar{t}_r+t_r\bar{x}_r)+\bar{x}_1\dots\bar{x}_n\}}{2\phi-1}$$

and developing as before,

$$v=\sum\nolimits_1(XT)+\bar{t}_1\dots\bar{t}_n\sum\nolimits_1(X)+0\{\sum\nolimits_2(XT)+\bar{t}_1\dots\bar{t}_n\sum\nolimits_2(X)\}+\frac{1}{0}(\text{sum of other constituents}). \tag{12}$$

所有不在φ中的成分之和。这些表达式确实在此处被使用 P1(X)表示在φ中找到的所有成分之和 P.X2(φ)的以及 1 – φ 以保持对称性。

Here $\sum_2(X)$ indicates the sum of all the constituents of X found in ϕ. The expressions are indeed used in place of ϕ and $1-\phi$ to preserve symmetry.

It follows hence that $\sum_1(X)+\sum_2(X)=1$, and that, as before, $\sum_1(XT)+\sum_2(XT)=\sum(XT)$. Hence V will have the same value as before, and we shall have

$$\text{Prob. } v=\frac{\sum_1(XT)+\bar{t}_1\dots\bar{t}_n\sum_1(X)}{V},$$

Or transforming, as in the previous case,

$$\text{Prob. } v=\frac{M_1+N_1}{M+N-1}, \tag{13}$$

wherein N_1 is formed by dividing ϕ by $\bar{x}_1\dots\bar{x}_n$, and changing in the result $\frac{x_1}{\bar{x}_1}$ into n_1, $\frac{x_2}{\bar{x}_2}$ into n_2, &c.

现在，所提问题的最终解将由赋予分数各项以其确定的值而给出

$$\frac{\text{Prob. } \phi(x_1, \ldots x_n)z}{\text{Prob. } \phi(x_1, \ldots x_n)}, \text{or} \frac{\text{Prob. } w}{\text{Prob. } v}.$$

因此，由(11)和(13)可得

$$\text{Prob. sought} = \frac{M_1}{M_1 + N_1}$$

稍加注意函数 M 1与 N 1的构成方式，即可看出该过程可大大简化。事实上，我们可以将一般问题的解表述为如下规则的形式：

Reject from the function $\phi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ *the constituent* $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n$ *if it is therein contained, suppress in all the remaining constituents the factors* $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, *&c., and change generally in the result* x_r *into* $\frac{c_r p_r}{\mu - c_r p_r}$. *Call this result* M_1.

再次，在函数 φ(x 1 , x 2 ...x n) 中替换成分 x 1 ... x n 若其中找到，则以单位替换；在所有剩余成分中消去因子 x 1, x 2， 等等，并在结果中一般地将 c r (1 – p r)

Then the solution required will be expressed by the formula

$$\frac{M_1}{M_1 + N_1}, \tag{14}$$

μ 并由该方程组的解确定

$$\mu + \nu - 1 = \frac{(\mu - c_1 p_1) \ldots (\mu - c_n p_n)}{\mu^{n-1}} = \frac{\{\nu - c_1(1 - p_1)\} \ldots \{\mu - c_n(1 - p_n)\}}{\nu^{n-1}}. \tag{15}$$

可以补充说，μ 与 v 的界限与前一问题中相同。这可以从连续性的一般原理推出；但那些很可能充分的限制条件，也可以通过其他考虑来建立。

因此，从概率中一般方法的论证(第十七章命题iv.)可以看出，原始代数方程组中的量 x 1 , ...x n , t 1 , ...t n 必须是正的真分数。现在

$$\frac{x_r}{1 - x_r} = n_r = \frac{c_r(1 - p_r)}{\nu - c_r(1 - p_r)}.$$

Hence generally n_r must be a positive quantity, and therefore we must have

$$\nu \overset{=}{>} c_r(1 - p_r).$$

以同样的方式，既然我们有

$$\frac{x_r t_r}{(1 - x_r)(1 - t_r)} = m_r = \frac{c_r p_r}{\mu - c_r p_r},$$

~~一般来说，he~~我们必须有 ally

$$\mu \overset{=}{>} c_r p_r.$$

16. 很可能这样表示的两类条件合在一起足以一般地确定在决定 μ 与 v 的方程的根中应取哪一个。让我们特别考虑 n = 2 的情形。此处我们有

$$\mu + \nu - 1 = \frac{(\mu - c_1 p_1)(\mu - c_2\ p_2)}{\mu} = \mu - (c_1 p_1 + c_2 p_2) + \frac{c_1 p_1 c_2 p_2}{\mu},$$
$$\therefore \nu = 1 - c_1 p_1 - c_2 p_2 + \frac{c_1 p_1\ c_2 p_2}{\mu} = 1 - c_1 p_1 - \frac{(\mu - c_1 p_1) c_2 p_2}{\mu}.$$

Whence, since $\mu \overset{=}{>} c_1 p_1$ we have generally

$$\nu \overset{=}{<} 1 - c_1 p_1.$$

In like manner we have

$$\nu \overset{=}{<} 1 - c_2 p_2, \quad \mu \overset{=}{<} 1 - c_1(1 - p_1), \quad \mu \overset{=}{<} 1 - c_2(1 - p_2).$$

Now it has already been shown that there will exist but one value of μ satisfying the whole of the above conditions relative to that quantity, viz.

$$\mu \overset{=}{>} c_r p_r, \quad \mu \overset{=}{<} 1 - c_r(1 - p_r),$$

因此至少对于这一情形，解是确定的。并且我认为同样的方法一般地适用且充分。但这是一个尚需进一步阐明的问题。

为验证上述结果，设 φ(x ^{1} , ...x n) = 1，这实际上就是前一问题中所考虑的情形。现在 1 的展开式给出记号 x ^{1} , ...x n 的一切可能的成分。于是按照规则进行，我们得到

$$M_1 = \frac{\mu^n}{(\mu - c_1 p_1) \ldots (\mu - c_n p_n)} - 1 = \frac{\mu}{\mu + \nu - 1} - 1 \text{ by (15).}$$
$$N_1 = \frac{\nu^n}{\{\nu - c_1(1 - p_1)\} \ldots \{\nu - c_n(1 - p_n)\}} - 1 = \frac{\nu}{\mu + \nu - 1} - 1.$$

代入(14)我们得到

$$\text{Prob. } z = 1 - \nu,$$

which agrees with the previous solution.

Again, let $\phi(x_1, \ldots x_n) = x_1$, which, after development and suppression of the factors $\bar{x}_2, \ldots \bar{x}_n$, gives $x_1(x_2 + 1) \ldots (x_n + 1)$, whence we find

$$M_1 = \frac{c_1 p_1 \mu^{n-1}}{(\mu - c_1 p_1) \ldots (\mu - c_n p_n)} = \frac{c_1 p_1}{\mu + \nu - 1} \text{ by (15).}$$
$$N_1 = \frac{c_1(1 - p_1)\nu^{n-1}}{\{\nu - c_1(1 - p_1)\} \ldots \{\nu - c_n(1 - p_n)\}} = \frac{c_1(1 - p_1)}{\mu + \nu - 1}.$$

代入，我们得到

若事件 A ^{1}发生，则 E 将发生的概率 = p ^{1} .

这一结果由数据得到验证。类似的验证可以很容易地补充。

让我们考察这样的情况：

$$\phi(x_1, \ldots x_n) = x_1\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n + x_2\bar{x}_1\bar{x}_3 \ldots \bar{x}_n \ldots + x_n\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{n-1}.$$

此处我们发现

$$M_1 = \frac{c_1p_1}{\mu - c_1p_1} \ldots + \frac{c_np_n}{\mu - c_np_n},$$
$$N_1 = \frac{c_1(1-p_1)}{\nu - c_1(1-p_1)} \ldots + \frac{c_n(1-p_n)}{\nu - c_n(1-p_n)};$$

由此我们得到以下结果--

$$\left.\begin{array}{l}\text{Probability that if some one}\\ \text{alone of the causes } A_1, A_2 \ldots A_n\\ \text{present itself, the event } E \text{ will}\\ \text{follow.}\end{array}\right\} = \frac{\sum \frac{c_rp_r}{\mu - c_rp_r}}{\sum \frac{c_rp_r}{\mu - c_rp_r} + \sum \frac{c_r(1-p_r)}{\nu - c_r(1-p_r)}}$$

请注意，这一情形与众所周知的情形大不相同，在后一情形中，原因 A ^{1}, ...A n 的互斥性质是数据的一个元素，表达了一种条件，据以进行那些据以确定 A ^{1}, A ^{2} ， 等等的概率的观察。

Consider, lastly, the case in which $\phi(x_1, \ldots x_n) = x_1x_2 \ldots x_n$. Here

$$M_1 = \frac{c_1p_1 \ldots c_np_n}{(\mu - c_1p_1) \ldots (\mu - c_np_n)} = \frac{c_1p_1 \ldots c_np_n}{\mu^{n-1}(\mu + \nu - 1)},$$
$$N_1 = \frac{c_1(1-p_1) \ldots c_n(1-p_n)}{\{\nu - c_1(1-p_1)\} \ldots \{\nu - c_n(1-p_n)\}} = \frac{c_1(1-p_1) \ldots c_n(1-p_n)}{\nu^{n-1}(\mu + \nu - 1)}.$$

由此得出以下结果--

$$\left.\begin{array}{l}\text{Probability that if all the causes}\\ A_1, \ldots A_n \text{ conspire, the event } E\\ \text{will follow.}\end{array}\right\} = \frac{p_1 \ldots p_n\nu^{n-1}}{p_1 \ldots p_n\nu^{n-1} + (1-p_1) \ldots (1-p_n)\mu^{n-1}}.$$

这一表达式如其所应然地，当量 p ^{1}, ...p n 中任何一个等于 1 时，取值为 1。

17. 问题 VIII.--某些原因 A ^{1}, A ^{2}, ...A n 受到如此限制，以致它们不能全部不成立，但仍然只能以由方程所表示的某些确定组合出现

$$\phi(A_1, A_2 \ldots A_n) = 1,$$

并且给出了上述原因的各自概率 c ^{1} , ...c n，以及相应的概率 p ^{1} , ...p n，即若那些各自的原因实现，事件 E 将随之发生，求事件 E 的概率。

这一问题在若干细节上与刚才考虑的问题不同，但主要在于：由方程 φ(A ^{1} , ...A n) = 1 所表示的限制构成数据之一，并被假定为由据以获得问题数值元素知识的那个经验所提供或与之相符。

Representing the events $A_1, \dots A_n$ by $x_1, \dots x_n$ respectively, and the event E by z, we have—

$$\text{Prob.}\, x_r = c_r, \quad \text{Prob.}\, x_r z = c_r p_r. \tag{1}$$

让我们一般地假设，

$$x_r z = t_r,$$

然后将由此指示的方程组与这些方程结合起来

$$\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n = 0, \quad \phi(x_1, \dots x_n) = 1, \quad \text{or } \phi = 1,$$

在数据中给出，我们最终得到作为 z 的展开表达式，

$$z = \sum(XT) + 0\bar{t}_1\bar{t}_2 \dots \bar{t}_n \sum(X), \tag{2}$$

a succession, each constituent found in ϕ, and T a

其中X依次代表在φ中发现的每个构成成分，而T代表记号t1、...、tn的类似构成成分序列；P(XT)仅包含关于两组记号的对称构成成分。本案例中要采用的归约方法与先前问题中已示例的方法如此相似，以至于我仅展示其所导出的结果。我们发现

$$\text{Prob.}\, z = \frac{M}{M+N} \tag{3}$$

与这些关系

$$\frac{M_1}{c_1 p_1} \dots = \frac{M_n}{c_n p_n} = \frac{N_1}{c_1(1-p_1)} = \frac{N_n}{c_n(1-p_n)} = M + N. \tag{4}$$

其中 M 是通过在 φ(x ^{2} , ...x n) 中消去所有因子 x ^{1} , ...¯x n 而形成的，并在结果中将 x ^{1} 变为 m ^{1}，将 x n 变为 m n，而 N 是通过在 M 中用 n ^{1}替换 m ^{1}等而形成的；此外 M ^{1}由 M 中以 m ^{1}为因子的那部分构成，N ^{1}由 N 中以 n ^{1}为因子的那部分构成；如此

让我们举例说明原因 A ^{1} ...A n 互斥的特定情形。此处我们有

$$\phi(x_1, \dots x_n) = x_1\bar{x}_2 \dots \bar{x}_n \dots + x_n\bar{x}_1 \dots \bar{x}_{n-1}.$$

由此

$$M = m_1 + m_2 \ldots + m_n,$$
$$N = n_1 + n_2 \ldots + n_n,$$
$$M_1 = m_1, N_1 = n_1, \ \&\text{c.}$$

代入，我们得到

$$\frac{m_1}{c_1 p_1} \ldots = \frac{m_n}{c_n p_n} = \frac{n_1}{c_1(1-p_1)} \ldots = \frac{n_n}{c_n(1-p_n)} = M + N.$$

Hence we find

$$\frac{m_1 + m_2 \ldots + m_n}{c_1 p_1 + c_2 p_2 \ldots + c_n p_n} = M + N,$$

or

$$\frac{M}{c_1 p_1 \ldots + c_n p_n} = M + N.$$

Hence, by (3),

$$\text{Prob. } z = c_1 p_1 \ldots + c_n p_n,$$

一个已知的结果。

还有其他特定情形使方程组(4)易于求解。然而显然，在大多数情况下它会导出极其复杂的结果。而且，原因之间存在函数关系(如一般问题的数据中所假定的那样)的情形，似乎也不太可能在实际经验中经常出现；除非我们只考虑上面讨论过的那些特定情形。

如果一般问题被修改为限制事件 E 不能发生，所有原因 A ^{1} ...A n 均不存在，而不是限制所述原因不能全部失败，保留由方程 φ(A ^{1} , ...A n) = 1 表示的剩余条件，我们本应求得最终逻辑方程为

$$z = \sum_1 (XT) + 0 \sum (X),$$

$\sum(X)$ being, as before, equal to $\phi(x_1, \ldots x_n)$, but $\sum_1(XT)$ formed by rejecting from ϕ the particular constituent $\bar{x_1} \ldots \bar{x_n}$ if therein contained, and then

将结果的每个 x -成分乘以相应的 t -成分。显然，在原因互斥的特定情形中，由此推出的 Prob.z 的值将与前面相同。

18. 问题 IX.--假定前述任一问题的数据，要求确定若事件 E 出现，它将与特定原因 A r 相关联的概率；换言之，确定当观察到事件 E 发生时原因 A r 的˙后验概率。

在这种情况下，我们必须求该分数的值

$$\frac{\text{Prob. } x_r z}{\text{Prob. } z}, \text{ or } \frac{c_r p_r}{\text{Prob. } z}, \text{ by the data.} \qquad (1)$$

如前几个问题中那样，Prob .z 的值已就原因的联系或缺乏联系的不同假说而给定，显然在所有这些情形中，本问题都可通过简单地将如此确定的该元素的值代入(1)而得到确定的解。

如果原因的`先验概率相等，我们有 c 1 = c 2 ...= c r。因此对于不同原因，值(1)将直接随量 p r 变化。因此无论原因之间联系的性质如何，每个原因的`后验概率将与该原因已知存在时观察到事件 E 的概率成正比。这个定理的特殊情况，即当原因互斥时呈现的情况，是众所周知的。我们于是有

$$\frac{\text{Prob. } x_r z}{\text{Prob. } z} = \frac{c_r p_r}{\sum c_r p_r} = \frac{p_r}{p_1 + p_2 \ldots + p_n},$$

the values of $c_1, \ldots c_n$ being equal.

尽管在原因互斥的特殊情形下，为证明这些及类似定理，并不需要引入函数记号 φ--这实际上等于宣称我们有权选择关于原因联系的一切可能且可设想的假说--然而，无论以何种形式，用本著作的方法求解那些数据数目无限多的问题，总不免带有某种复杂的性质。它首先呈现逻辑关系、其次呈现数值关系的那种系统展开，是否足以补偿其过程的冗长与时而令人厌倦，我不敢妄加探究。其 chief value 无疑在于它的力量--在于它赋予我们对那些显然非人类理性独力所能及的问题的驾驭能力。因此，在本章中展示它对这些问题的应用，并不被认为是多余的，其中有些问题可能因其困难而被视为令人望而却步，而又无任何眼前效用的前景可资推荐。至于这类思辨的最终价值，我认为我们目前不可能作出任何确定的判断。

19. 下述问题比前几个问题容易得多。

问题 X.- 在给定情况下某一自然现象发生的概率为 。观察还记录到该现象存在一种永久原因的概率，即一种在假设的情况下总会产生该事件的原因的概率。如果在给定情况下观察到该现象连续发生次，那么它将在第 n + 1 次发生的概率是多少?在这样观察之后，所指的永久原因存在的概率又是多少？

第一种情形。--设 t 表示一个永久原因的存在，而 x 1 , x 2 ...x n +1表示自然现象的相继发生。

If the permanent cause exist, the events $x_1, x_2 \ldots x_{n+1}$ are necessary consequences. Hence

$$t = vx_1, \quad t = vx_2, \ \&c.,$$

并消去不定符号，

$$t(1 - x_1) = 0, \quad t(1 - x_2) = 0, \quad t(1 - x_{n+1}) = 0.$$

Now we are to seek the probability that if the combination $x_1 x_2 \ldots x_n$ happen, the event x_{n+1} will happen, i.e. we are to seek the value of the fraction

$$\frac{\text{Prob. } x_1 x_2 \ldots x_{n+1}}{\text{Prob. } x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

我们将首先寻求 Prob .x 1 x 2 ...x n 的值。用 w 表示组合 x 1 x 2 ...x n，则我们有以下逻辑方程：

$$t(1 - x_1) = 0, \quad t(1 - x_2) = 0, \ldots t(1 - x_n) = 0,$$
$$x_1 x_2 \ldots x_n = w.$$

将后者化为以下形式

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)(1 - w) + w(1 - x_1 x_2 \ldots x_n) = 0,$$

and adding it to the former ones, we have

$$\sum t(1 - x_i) + x_1 x_2 \ldots x_n(1 - w) + w(1 - x_1 x_2 \ldots x_n) = 0, \qquad (1)$$

其中P扩展到从 1 到 n 的 i 的所有值，对于数据的一个逻辑方程。与此我们必须连接数值条件，

$$\text{Prob. } x_1 = \text{ Prob. } x_2 \ldots = \text{ Prob. } x_n = p, \quad \text{Prob. } t = a;$$

而我们的目标是求 Prob, w。

由(1)可得

$$w = \frac{\sum t(1 - x_i) + x_1 x_2 \ldots x_n}{2x_1 x_2 \ldots x_n - 1}$$
$$= \frac{\sum (1 - x_i) + x_1 x_2 \ldots x_n}{2x_1 x_2 \ldots x_n - 1} t + \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{2x_1 x_2 \ldots x_n - 1}(1 - t), \qquad (2)$$

on developing with respect to t. This result must further be developed with respect to $x_1, x_2, \ldots x_n$.

现在如果我们令 x 1 = 1 , x 2 = 1 , ...x n = 1，则 t 和 1 – t 的系数都变为 1。如果我们给相同的记号任何其他由 0 和 1 互换形成的值集，显然 t 的系数将变为否定，而 1 – t 的系数将变为 0。因此完整的展开式(2)将

是

$$w = x_1 x_2 \ldots x_n t + x_1 x_2 \ldots x_n(1 - t) + 0(1 - x_1 x_2 \ldots x_n)(1 - t)$$
$$+ \text{ constituents whose coefficients are } \frac{1}{0}, \text{ or equivalent to} \frac{1}{0}.$$

这里我们有

$$V = x_1x_2\ldots x_nt + x_1x_2\ldots x_n(1-t) + (1-x_1x_2\ldots x_n)(1-t)$$
$$= x_1x_2\ldots x_nt + 1 - t;$$

由此，从逻辑学过渡到代数学，

$$\frac{x_1x_2\ldots x_nt + x_1(1-t)}{p} = \frac{x_1x_2\ldots x_nt + x_2(1-t)}{p}\ldots$$
$$= \frac{x_1x_2\ldots x_nt + x_n(1-t)}{p} = \frac{x_1x_2\ldots x_nt}{a} = x_1x_2\ldots x_nt + 1 - t.$$
$$\text{Prob. } w = \frac{x_1x_2\ldots x_n}{x_1x_2\ldots x_nt + 1 - t}.$$

从上述方程的形式可以明显看出，我们有 $x^1 = x^2 \ldots = x^n$。然后将这些量中的每一个替

$$\frac{x^nt + (1-t)x}{p} = \frac{x^nt}{a} = x^nt + 1 - t,$$
$$\text{Prob. } w = \frac{x^n}{x^nt + 1 - t};$$

由此我们容易推得

$$\text{Prob. } w = \text{ Prob. } x_1x_2\ldots x_n = a + (p-a)\left(\frac{p-a}{1-a}\right)^{n-1}$$

若在此结果中我们将 n 改为 n + 1，则得到

$$\text{Prob. } x_1x_2\ldots x_{n+1} = a + (p-a)\left(\frac{p-a}{1-a}\right)^{n}$$

因此我们得到--

$$\frac{\text{Prob. } x_1x_2\ldots x_{n+1}}{\text{Prob. } x_1x_2\ldots x_n} = \frac{a + (p-a)\left(\frac{p-a}{1-a}\right)^{n}}{a + (p-a)\left(\frac{p-a}{1-a}\right)^{n-1}} \qquad (3)$$

作为如果现象重复 n 次，它也将出现第 $n + 1^{th}$次的概率的表达式。通过第十九章的方法发现 a 的值不能超过 p。

以下验证是明显的：- 第一。如果 a = 0，表达式简化为 p，正如它应该的那样。因为当确定不存在永久原因时，现象的连续出现是独立的。

第二。若 p = 1，则该表达式变为 1，正如它应当如此。

第三。如果 p = a，表达式变为 1，除非 a = 0。如果一个现象的概率等于存在一个原因的概率，该原因

在给定情况下总会产生它，那么该现象曾在那些情况下被注意到这一事实，就使其在相同情况下必定重新出现。[5]

第四，随着 n 增大，该表达式的值趋近于 1。这表明事件再次发生的概率随其连续出现次数的增加而增大--这一结果符合期望的自然规律。

第二种情形。--我们现在要寻求该现象存在一种永久原因的后验概率`*a posteriori*。这要求我们确定该分数的值

$$\frac{\text{Prob. } tx_1x_2\ldots x_n}{\text{Prob. } x_1x_2\ldots x_n}$$

其分母已经确定。

为确定分子，假设

$$tx_1x_2\ldots x_n = w,$$

然后按照前面的方法进行，我们得到逻辑展开式，

$$w = tx_1x_2\ldots x_n + 0(1-t).$$

由此，从逻辑学过渡到代数学，我们立刻就有

$$\text{Prob. } w = a,$$

这一结果本可预料。于是，将上述分数的分子和分母代以其值，我们得到永久原因的后验`*a posteriori*概率的表达式

$$\frac{a}{a + (p-a)\left(\dfrac{p-a}{1-a}\right)^{n-1}}.$$

It is obvious that the value of this expression increases with the value of n.

我感谢一位博学的通信者[6]，他对概率论的原创性贡献前已提及，提供了对上述第一个结果(3)的如下验证。

---

5 我们既不能重新进入也不能回忆婴儿期的状态，因此无法说明上述结果在多大程度上有助于解释幼童为何如此确信地连接他们一旦感知到其关联的事件。但我们可以一般地推测，他们期望的强度源于推理的必然性(作为其理性本性的一部分)，以及该能力所运用的狭窄却深刻的印象经验。因此，一切序列都被归因于因果序列。作者的一位小朋友在被放上床睡觉时，有人听到他向他哥哥提出那个切中要害的问题--“为什么晚上睡觉会使早晨天亮?”比他大一岁的哥哥能够回答说，即使小男孩们晚上不睡觉，早晨也会天亮。

6 多金教授。

“该事件(在此情况下)的整个先验`*a priori*概率为p，某个必然产生它的原因C的概率为a，设x为若不存在C这样的原因时它将会发生的概率。于是我们有方程

$$p = a + (1 - a)x,$$

whence

$$x = \frac{p - a}{1 - a}.$$

Now the phænomenon observed is the occurrence of the event n times. The *à priori* probability of this would be—

1 假设存在，
x ^{n}假设 C 不存在；

由此，C 存在的`*a posteriori*概率是

$$\frac{a}{a + (1 - a)x^n},$$

不存在，这是

$$\frac{(1 - a)x^n}{a + (1 - a)x^n}.$$

因此，再次发生的概率是

$$\frac{a}{a + (1 - a)x^n} \times 1 + \frac{(1 - a)x^n}{a + (1 - a)x^n} \times a,$$

或

$$\frac{a + (1 - a)x^{n+1}}{a + (1 - a)x^n},$$

将n代以其值$^{p-a}$后，

$\overline{1 - a}$，将被发现与(3) ^{相符}.”

对于通过直接应用一般方法所得到的下列结果，很可能也可以找到类似的验证。

在相同情况下，若在n次场合中事件发生r次、未发生n – r次，则它在第n + 1^{次}发生的概率为

time is

$$\frac{a + m(p - a)\left(\frac{p - la}{1 - a}\right)^r}{a + m(p - la)\left(\frac{p - la}{1 - a}\right)^{r-1}}$$

wherein $m = \frac{n(n-1)\ldots n-r+1}{1 \cdot 2 \ldots r}$ and $l = \frac{r}{n}$.

The probability of a permanent cause (r being less than n) is 0. This is easily verified.

若p为某事件的概率，c为若该事件发生则它将归因于永久原因的概率；则在观察到n次连续发生后，它在第n + 1次类似场合重现的概率为

$$\frac{c+(1-c)x^n}{c+(1-c)x^{n-1}},$$

$$\text{wherein } x=\frac{p(1-c)}{1-cp}.$$

20. 值得注意的是，前述问题的解答不含任何任意元素。仅从数据的外观来看，我们几乎不会预料到这种情况。然而应当指出，在所有这些题目中，所涉及的原因的概率都被假定为先验地已知。在缺乏这一被假定的知识元素的情况下，似乎很可能任意常数会必然地出现在最终解答中。有一类问题为这一评述提供了一些佐证，这类问题曾引起相当多的关注，最后我将简要地加以考察。人们已经注意到，天空中存在大量极其靠近的双星。这些表面上的联系实例要么有某种物理根据，要么没有。如果没有，我们可以把双星这一现象视为恒星在天穹上“随机分布”的偶然结果，也就是说，这样一种分布会使双星系统中任一成员出现在某一位置与出现在另一位置具有同等的概率。如果采用这一假说，并且如果已知具有所需亮度的恒星数目，我们就能确定其中两颗恒星彼此距离近到足以构成所观察到的现象的概率。于是，米切尔[7]估计天上有230颗亮度与β摩羯座星相等的恒星，并断定：若这些恒星随机分布，则出现这样一种组合的概率为80比1。于是，在观察到这样一种组合之后，就需要求出其成员之间存在物理联系根据的概率。

再者，根据法国度量，1801 年十颗已知行星轨道对黄道面的倾角之和为 91 °· 4187。拉普拉斯[8]断定，若所有倾角都同等可能，则倾角平均值落在如此指定范围内的概率仅为极其微小的 .00000011235。他由此得出结论：有很高的概率支持存在某种安排性的原因，使行星轨道的倾角被限制在如此狭窄的界限之内。德摩根教授[9]取倾角之和为 92 °，赋予上述概率值 .00000012，并推断“太阳系形成时存在一个必然原因使倾角成为现在这样，其概率为 1: .00000012。”一个同样确定的

7 《哲学汇刊》，1767年。
8 《概率的分析理论》，第276页。
9 《大都会百科全书》。条目“概率”。

结论是从岩晶中圆偏振方向与其晶体结构中某些斜面的方向之间所观察到的巧合中得出的。[10]

这些题目都具有相似的性质。人们构设某个假说，对于它的各种可能后果，我们能够以完全的严格性赋予概率。现在，如果在那些后果中发现了某个实际的观察结果，因而其假定的概率已知，就需要由此确定所假定的假说或其反面的概率。在米切尔的题目中，假说是“恒星的随机分布”，可能且被观察到的后果是出现一颗靠近的双星。这种结果极小的概率被认为意味着该假说的概率同样小，或至少属于同一小量级。于是便推断出恒星安排中存在安排性原因的高概率，而且--如某些人所认为--是确定的概率。类似的评述适用于所举的其他例子。

21. 这个一般性问题，无论以何种形式提出，都只容许不确定的解答。设 x 表示所提出的假说，y 表示一个可能作为其可能后果之一而出现的现象，其在假定该假说为真的情况下的计算概率为 p，并要求确定：如果观察到现象 y，则假说 x 为真的概率。这个问题的数据本身若不引入一个任意元素就无法表达。我们只能写出

$$\text{Prob. } x = a, \quad \text{Prob. } xy = ap; \tag{1}$$

a完全任意，只是它必须落在0与1(含)的界限之内。于是若P表示所求的条件概率，我们有

$$P = \frac{\text{Prob. } xy}{\text{Prob. } y} = \frac{ap}{\text{Prob. } y}. \tag{2}$$

于是剩下要确定Prob .y。设xy = t，则

$$y = \frac{t}{x} = tx + \frac{1}{0}t(1-x) + 0(1-t)x + \frac{0}{0}(1-t)(1-x). \tag{3}$$

Hence observing that $\text{Prob. } x = a$, $\text{Prob. } t = ap$, and passing from Logic to Algebra, we have

$$\text{Prob. } y = \frac{tx + c(1-t)x}{tx + 1 - t},$$

with the relations

$$\frac{tx + (1-t)x}{a} = \frac{tx}{ap} = tx + 1 - t.$$

因此我们容易发现

$$\text{Prob. } y = ap + c(1-a). \tag{4}$$

[10]Edinburgh Review, No. 185, p. 32. This article, though not entirely free from error, is well worthy of attention.

Now recurring to (3), we find that c is the probability, that if the event $(1-t)(1-x)$ occur, the event y will occur. But

$$(1-t)(1-x) = (1-xy)(1-x) = 1-x.$$

Hence c is the probability *that if the event x do not occur, the event y will occur.*

将Prob .y的值代入(2)，我们得到如下定理：在某一假定的物理假说下，任何现象的计算概率为，当该现象已被观察到时，该物理假说的后验概率由以下方程表示

$$P = \frac{ap}{ap + c(1-a)}, \tag{5}$$

其中和是任意常数，前者表示该假说的先验概率，后者表示若该假说为假时该事件将会出现的概率。

从上述定理可推出的主要结论是：在其他情况相同的条件下，P 的值与 p 的值同时增大和减小。因此，在假定假说时现象的概率越大或越小，在已观察到现象时假说的概率也就越大或越小。当 p 很小时，通常 P 也很小，除非 a 很大或 c 很小。因此，其次，如果在假定假说时现象的概率很小，那么在观察到现象时假说的概率就很小，除非假说的先验概率 a 很大，或者现象在任何其他假说下的概率很小。

公式(5)在多种情形下可得到精确验证，例如当c = 0，或a = 1，或a = 0时。但显然，除非有确定a与c之值的手段，它并不能给出P的确定值。任何声称能实现这一目标的解法，要么在原则上错误，要么包含关于上述任意元素的默认假定。德摩根先生对拉普拉斯问题的解法--该问题涉及行星轨道对黄道面倾角被限制在狭窄范围内的确定原因是否存在--在我看来属于后一类。在求得概率p = .00000012，即在每个轨道中所有倾角程度等可能时倾角之和小于92 °的概率之后，这位能干的作者评论道：“如果倾角如所述那样有其原因，则该事件的概率为1。因此，太阳系形成时存在一个必然原因使倾角成为现在这样，其概率为1: .00000012(即1: p)。”现在，这个结果正是方程(5)在将上述值赋予p、并假定c = 1、a = 12.因为我们应当如此求得，

$$P = \frac{\frac{1}{2}p}{\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}} = \frac{p}{1+p}$$
$$\therefore 1-P : P :: 1 : p. \tag{6}$$

但P表示所有倾角都同等可能的`*a posteriori*概率，1 – P则表示并非如此的`*a posteriori*概率，或者，采用德摩根先生的择一说法，即存在一个决定性的原因。因此，方程(6)与德摩根先生的结果一致。

22. 然而，我们有权将特定值赋予a与c吗?我强烈倾向于认为我们无权这样做。这一问题在特殊实例中的重要性不如在其深远影响中的重要性。在概率论已被接受的应用中，任意常数并不显式出现；但在上述情形以及许多其他得到最高权威认可的情形中，人们曾试图对它们作出某种实质性的确定。而这一情况赋予了该理论的结果--尤其是在涉及因果关系的问题上--一种确定精确的性质，这种性质一方面似乎抬高了数的统治地位并扩展了数的领域，甚至超出了其自古以来统治世界的权限；[11]另一方面则激起了强烈的抗议，反对它们侵入那些唯有猜测才是推论基础的领域。像上述这样用本书方法处理的问题，其解法中出现任意常数这一事实本身，似乎就意味着确定解是不可能的，并标志着探究应当停止之处。我们确实拥有解释这些常数的手段，但如此指示的经验，与那种将排除任何求解尝试之必要性的经验一样，远非我们所能企及。

伴随这些问题而来的另一困难--也许是我们官能构造本身所固有的--是精确界定所谓秩序意味着什么。除了在非常复杂的情形中，我们不难察觉该原则的表现，也不犹豫将其归因于在法则下起作用的原因中几乎必然的基础。但要给它指定一个数值价值的标准，则将是徒劳的，甚至可以说是僭妄的努力。然而，在我们能够期望准确权衡宇宙不同构成的概率[12][13]，从而确定唯有据此才能对所论问题建立确定解的元素之前，这一尝试必须作出。

23. 在概率论中，对于建立在不足数据之上的问题，要设法回避其解法之必然任意性，最常用的方式是将所有可能的概率程度赋予某个真实概率未知的元素；假定这些概率程度本身是等可能的；并把它们视为所观察现象的众多不同原因，进而应用那些代表由若干等可能但相互排斥的原因之一所致结果之情形的定理(问题9)。例如，太阳在一定间隔之后升起

11 数字统治世界。

12 原文为“probabibilities”,2004年由Distributed Proofreaders修正。

13 以下脚注原在原文中但正文未引用，故此处引用[14],2004年由Distributed Proofreaders处理。

14 参见福布斯教授(Prof.Forbes)在《哲学杂志》(Philosophical Magazine)1850年12月号上的一篇有趣论文；另见密尔《逻辑学》(Mill's Logic)第十八章。

连续 m 次观察到黑暗之后，按照公认的原理，太阳在同一情况下再次升起的概率按以下方式确定。设 p 为 0 与 1 之间的任一未知概率，而 c(无穷小且为常数)为这样的概率：太阳在经过一段黑暗间隔之后升起的概率介于 p 与 p + dp 两限之间。于是太阳连续升起 m 次的概率为

$$c\int_0^1 p^m dp;$$

而他做到这一点、并再次上升，或者，同一回事，他连续上升m + 1次的概率为

$$c\int_0^1 p^{m+1} dp,$$

Hence the probability that if he rise m times in succession, he will rise the $m+1^{th}$ time, is

$$\frac{c\int_0^1 p^{m+1}dp}{c\int_0^1 p^m dp} = \frac{m+1}{m+2},$$

the known and generally received solution.

上述解法通常建立在一个假定的类比之上，即把该问题类比于从一个装有黑球与白球混合物的瓮中取球，并假定一切可能的数值比都同等概率。值得注意的是，有两三个不同的假说会导致同一最终结果。例如，若球数为有限，且取出的球不再放回，或者若球数为无限，无论取出的球放回与否，那么，假定 m 次连续抽取所得皆为白球，则在第 m + 1 th 次抽取中出白球的概率为

$$\frac{m+1}{m+2}.$$ [15]

有人说，上述以及类似应用中所涉及的原理，是我们的知识的均等分配，或者毋宁说是我们的无知的均等分配--即对于那些我们一无所知的事物的不同状态，正是基于我们一无所知这一理由，赋予相等的概率程度。然而我认为，这是一种武断的做法。可能出现这样的情况，而且已经举出过一例，其中不同的假说导致同一最终结论。但那些情况是例外。就所讨论的这一特定问题而言，在所引的论文中已经表明，有一个假说，即当球数为有限且不再放回时，会导致不同的结论；而且不难看出，还有其他假说，同样严格地包含着“知识或无知的均等分配”这一原理，也会导致互相冲突的结果。

15 见特罗特主教的论文，爱丁堡哲学会刊，第xx卷，第iv部分。

24. 例如，设日出之例由从一个装有无限多个球的袋中抽出一只白球来表示，袋中之球非黑即白，并设所假定的原理是，球系统的一切可能构成都同等概率。所谓球系统的一种构成，我指的是这样一种安排，它为系统中的每一个球指定一种确定的颜色，或黑或白。让我们由此寻求这样的概率：若在 m 次抽取中抽出 m 只白球，则在第 m + 1 th次抽取中将抽出一只白球。

首先，设球的数目为 μ，并令记号 x ^{1} , x ^{2} , ...x μ 按以下方式分派给它们。令 x i 表示这样的事件，即系统中第 i th个球为白，宣告这种事态的命题为 x i = 1。同样，复合记号 1 – x i 将表示第 i th个球为黑这一情况。显然，由全部记号 x ^{1} , x ^{2} , ...x μ 所构成的各个成分，将以同样方式表示球系统在黑白方面的各种可能构成，而这类构成的数目为 2 ^{μ}，按照假说，每一种构成的概率将为^{1}

$2^{-μ}$.这是我们应当求得的值

如果我们在任何成分的表达式中代入

记号x ^{1} , x ^{2} , ...x μ中的每一个，其值^{1}

2^{-}.因此，那么，该概率

任何可表述为上述成分序列的事件，其概率将通过在此类表达式中代入值^{1}而求得

$2^{-}$for

上述每一个符号。

现在，μ 越大，任何已被抽出并放回的球再次被抽出的概率就越小。当 μ 趋于无穷大时，这个概率趋于 0。在这种情况下，实际抽出的球的状态可以表示为记号 x ^{1} , x ^{2} , ...x μ 的 m 的逻辑函数，因此，通过展开式，可以表示为所述 m 记号的成分的级数。因此，它的概率将通过为每个记号(无论是在未展开形式还是展开形式中)代入值^{1}来求得。

2^{-}.但

这正是若每次抽取时白球概率先验*a priori*已知为^{1}时所必需且充分作出的代入

2^{-}.

因此可推出，若球数为无限，且系统的所有构成同等可能，则连续抽出m个白球的概率将为^{1}

2^{-m},和该概率的抽取m+1白

$\frac{1}{2^{m+1}}$

连续抽球 2 $^{m+1}$;

由此，在已抽出m个白球之后，下一次抽取将给出白球的概率为^{1}

$\frac{}{2}$。换句话说，过去的

在这种情况下不影响未来的预期。

25. 用普通方法来验证这一结果或许令人满意。为了

要实现这一点，我们将寻求--

第一：从一只装有 μ 个球的袋中，在 p 次抽取中抽出 r 个白球和 p – r 个黑球的概率，每次抽后都将球放回，且系统的所有构成都同等可能，先验地。

第二：当 μ 变为无穷大时，这个概率所取的值。第三：由此推出的概率，即如果连续抽出 m 个白球，那么抽出的第 m + 1 th个球也将是白球。

从包含 μ 个球的瓮中，在 p 次试验中抽出 r 个白球和 p – r 个黑球，每次试验后将每个球放回，并且如上定义的系统所有构成具有相等的概率，其概率等于在瓮中没有白球、1 个白球--最后 μ 个白球的各个独立假说下同一结果的概率之和。因此，它是在有 n 个白球的假说下这一结果的概率之和，n 从 0 变化到 μ。

现在假设有 n 个白球，单次抽取中抽到白球的概率为^{n} μ ,且该概率为抽取r白球和 p – r 个黑球在 p 次抽取中按特定顺序出现的概率，为

$$\left(\frac{n}{\mu}\right)^r \left(1-\frac{n}{\mu}\right)^{p-r}$$

但是，这样的顺序的数目等于从 p 个东西中取 r 个东西的组合数，因此，从由 μ 个球组成、其中 n 个是白球的系统中，在 p 次抽取中抽出 r 个白球的总概率是

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-r+1)}{1\cdot 2\ldots r}\left(\frac{n}{\mu}\right)^r \left(1-\frac{n}{\mu}\right)^{p-r} \qquad (1)$$

再者，由 μ 个球组成的系统中，恰好有 n 个球是白球的构成的数目是

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1\,.\,2\ldots n},$$

而该系统可能的构成的数目是 2 $^{\mu}$。因此，恰好有 n 个球是白球的概率是

$$\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1\,.\,2\ldots n2^{\mu}},$$

将(1)乘以这个表达式，并对乘积从 n = 0 到 n = μ 求和，我们得到

$$\frac{p(p-1)\ldots p-r+1}{1\,.\,2\ldots r}\sum_{n=0}^{n=\mu}\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{1\,.\,2\ldots n2^{\mu}}\left(\frac{n}{\mu}\right)^r \left(1-\frac{n}{\mu}\right)^{p-r}, \qquad (2)$$

作为总概率的表达式，即从由 μ 个球组成的系统中，其中

所有构成都同等可能，在 p 次抽取中将抽出 r 个白球。现在

$$\sum_{n=0}^{n=\mu} \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{1\,.\,2\dots n\,.\,2^{\mu}} \left(\frac{n}{\mu}\right)^{r} \left(1-\frac{n}{\mu}\right)^{p-r}$$
$$= \sum_{n=0}^{n=\mu} \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{1\,.\,2\dots n 2^{\mu}} \left(\frac{n}{\mu}\right)^{r} \left(1-\frac{n}{\mu}\right)^{p-r} \varepsilon^{n\theta}\dots(\theta=0)$$
$$= \frac{1}{2^{\mu}} \left(\frac{D}{\mu}\right)^{r} \left(1-\frac{D}{\mu}\right)^{p-r} \sum_{n=0}^{n=\mu} \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{1\,.\,2\dots n} \varepsilon^{n\theta}$$
$$= \frac{1}{2^{\mu}} \left(\frac{D}{\mu}\right)^{r} \left(1-\frac{D}{\mu}\right)^{p-r} (1+\varepsilon^{\theta})^{\mu}, \tag{3}$$

D standing for the symbol $\frac{d}{d\theta}$, so that $\phi(D)\varepsilon_{n\theta} = \phi(n)\varepsilon^{n\theta}$. But by a known theorem,

$$t^{m} = 1 + \Delta 0^{m} t + \frac{\Delta^{2} 0^{m}}{1\,.\,2} t(t-1) + \frac{\Delta^{3} 0^{m}}{1\,.\,2\,.\,3} t(t-1)(t-2).$$
$$\therefore D^{m}(1+\varepsilon^{\theta})^{\mu} = \{1 + \Delta 0^{m} D + \frac{\Delta^{2} 0^{m}}{1\,.\,2} D(D-1) + \ \&\text{c.}\}(1+\varepsilon^{\theta})^{\mu}.$$

在第二项中，令 ε θ = x，则

$$D^{m}(1+\varepsilon^{\theta})^{\mu} = (1 + \Delta 0^{m} x\frac{d}{dx} + \frac{\Delta^{2} 0^{m}}{1\,.\,2} x^{2}\frac{d^{2}}{dx^{2}} + \ \&\text{c.})(1+x)^{\mu},$$

因为

$$D(D-1)\dots(D-i+1) = x^{i}\left(\frac{d}{dx}\right)^{i}.$$

在上述方程的第二个成员中，进行微分并令 x = 1(因为 θ = 0)，我们得到

$$D^{m}(1+\varepsilon^{\theta})^{\mu} = \mu(\Delta 0^{m})2^{\mu-1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1\,.\,2}(\Delta^{2} 0^{m})2^{\mu-2} + \ \&\text{c.}$$

本方程第二部分的最后一项将是

$$\frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-m+1)\Delta^{m} 0^{m}}{1\,.\,2\dots m} 2^{\mu-m} = \mu(\mu-1)\dots(\mu-m+1)2^{\mu-m};$$

因为 Δ m 0 m = 1 ⋅ 2 ...m。当 μ 是一个大量时，这一项在数值上超过所有其他项，并且当 μ 趋近于无穷大时，与它们相比趋于变得无限大。此外，由于它取形式 μ m 2 μ–m，我们在取极限时得到

$$D^{m}(1+\varepsilon^{\theta})^{\mu} = \mu^{m} 2^{\mu-m} = \left(\frac{\mu}{2}\right)^{m} 2^{\mu}.$$

因此，如果 φ(D) 表示记号 D 的任意函数，且该函数能够展开为 D 的升幂级数，我们有

$$\phi(D)(1+\varepsilon^{\theta})^{\mu} = \phi\left(\frac{\mu}{2}\right)2^{\mu}, \tag{4}$$

如果 θ = 0 且 μ = ∞。严格地说，这意味着上述方程两个成员的比值随着 μ 增大趋向无穷大而趋近于相等状态，θ 等于 0。

借助这一定理，(3)式的最后一项化为如下形式

$$\frac{1}{2^{\mu}}\left(\frac{1}{2}\right)^{r}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{p-r}2^{\mu} = \left(\frac{1}{2}\right)^{p}.$$

因此(2)给出 gives

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-r+1)}{1\cdot 2\ldots r}\left(\frac{1}{2}\right)^{p},$$

作为概率的表达式，即从一只装有无限多个黑球和白球的瓮中，在系统的所有构成都同等可能的情况下，在 p 次抽取中将抽出 r 个白球。

因此，令 p = m,r = m，则在 m 次抽取中所有球都是白球的概率是 $\frac{1}{2}$

如果前 m 次抽取只产生白球，那么第 m + 1 th次抽取也将产生一个白球的概率是

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \div \left(\frac{1}{2}\right)^{m} = \frac{1}{2};$$

并且一般地，任何提出的结果都将具有与每次特定抽取产生白球或黑球的机会均等时相同的概率。这与先前得到的结论一致。

26. 这些结果只是说明了这样一个事实：当数据的缺陷由假说来补充时，解一般会随所假设的假说的性质而变化；因此问题仍然存在，只是形式上更明确了，即概率论的原则是否有助于我们在选择此类假说时提供指导。我已经表达了我的信念，即它们不能--这一信念得到了除上述理由之外的其他理由的加强。因此，通过本著作的方法找到了一个问题的确定解后，有时通过同样的方法，当其中一个数据，假设 Prob.x = p 1被省略时，也能获得同样确定的解。但我未能发现任何通过关于 p 的积分从第一个解推导出第二个解的模式，假设 p 在第十九章确定的范围内变化。然而，我认为，如果第 23 条中提到的原则是有效的，这种推导将是可能的。尽管如此，我仍以谦逊的态度表达我在这些点上与一般数学家的不同意见，尤其是

来自一位在英国作家中最充分地领会了拉普拉斯的精神和方法的人；我冒昧希望，一个在概率论中重要性不亚于任何其他问题的问题，将得到它应得的仔细关注。

第二十一章

前述一般方法在判决概率问题上的特称应用。

1. 假定本论著中用于解决概率论问题的一般方法已在前几章中得到充分阐明，这里建议进入其实际应用之一，从社会统计学的广阔领域中选出，即判断概率的估计。也许这一应用，如果以其直接结果来衡量，并不是所能选择的最佳应用。它导致的首要结论之一是，仅凭经验所能提供的数据对于完成探究的最重要目标而言是必然不充分的。但是，在向我们清楚地展示假说作为经验数据之补充的必然性，并使我们能够严格推导出可能假设的任何假说的后果方面，该方法完成了其范围内适当的一切。并且可以指出，在涉及我们自己物种行为的问题中，假说比在诸如前一章最后几节所提到的问题中更为合理。我们对人性的普遍经验有助于弥补统计记录的匮乏和不完善。

2. 与刑事审判相关的问题所涉及的元素如下：--

1. 陪审团某一特定成员对案件形成正确意见的概率。

第二，被告有罪的概率。
第三，他被判有罪或被宣告无罪的概率。
第四，他的定罪或无罪判决将是公正的概率。
第五，陪审团的构成。
6. 由经验提供的数据，例如一致裁决已经达成或获得特定多数的案件的相对数目；裁决被上级法院推翻的案件数目，等等。

再者，所考虑的这一类问题可以被视为要么是直接的，要么是反演的。概率的直接问题是那些其中

法庭每一成员作出正确判决的概率，或被告有罪的概率，被假定为`*a priori*已知，而问题在于求某一特定种类的判决、或具有确定多数票的判决的概率。逆问题则是这样一类问题：从经验所提供的数据出发，要求确定某个元素，该元素虽然与那些数据处于原因与结果的关系之中，却不能直接成为观察的对象；例如，从法庭判决的记录中，要求确定法庭某一成员作出正确判断的概率。对于这一类问题--整个系列中最困难也最重要的问题--此处将主要予以关注。

3. 解决上述列举中所提到的直接问题没有困难。假设只有一个陪审员。令 k 为被告有罪的概率；x 为陪审员将形成正确意见的概率；X 为被告将被判罪的概率：那么--

kx = 被告有罪的概率，且该
陪审员判定他有罪。

(l – k)(l – x) = 被告无
分，且陪审员判定他有罪。

现在，既然这些是能够作出有罪裁决的唯一情形，并且此外它们相互排斥，我们有

$$X = kx + (1 - k)(1 - x). \tag{1}$$

同样地，如果有 n 个陪审员，他们各自作出正确判断的概率为 x^1 , x^2 , ...x n，则一致有罪裁决的概率将是

$$X = kx_1x_2 \dots x_n + (1 - k)(1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_n).$$

由此，如果各个概率 x^1 , x^2 ...x n 相等，并且每个都由 x 表示，我们有

$$X = kx^n + (1 - k)(1 - x)^n. \tag{2}$$

在后一种情况下，被告有罪的概率将是

$$\frac{kx^n}{kx^n + (1 - k)(1 - x)^n}$$

所有这些结果都假定，其概率由k、x1、x2等表示的事件是独立的，然而，就我们所关注的范围而言，这一假定已隐含在以下事实之中：这些事件是唯一给出了概率的事件。按给定票数被判有罪的概率可以依据同样的原理求得。如果陪审团由三人组成，他们各自的

正确判决的概率为 x、x′、x″，则被告被其中两人宣告有罪的概率 X 2将为

$$X_2 = k\{xx'(1-x'') + xx''(1-x') + x'x''(1-x)\}$$
$$+(1-k)\{(1-x)(1-x')x'' + (1-x)(1-x'')x' + (1-x')(1-x'')x\},$$

which if $x = x' = x''$ reduces to

$$3kx^2(1-x) + 3(1-k)x(1-x)^2.$$

并且按照同样的推理方式，可以看出，若 X i 表示在由 n 人组成的陪审团中，被告被 i 票宣告有罪的概率，这些人的各自正确判断的概率相等，并以 x 表示，则

$$X_i = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1\,.\,2\dots i}\{kx^i(1-x)^{n-i} + (1-k)x^{n-i}(1-x)^i\}. \qquad (3)$$

If the probability of condemnation by a determinate majority a is required, we have simply

$$i - a = n - i,$$

whence

$$i = \frac{n+a}{2},$$

它必须代入上述公式中。当然，a 只容许使 i 成为整数的那些值。若 n 为偶数，则这些值为 0、2、4 等；若为奇数，则为 1、3、5 等，这在其他方面也是显然的。

以至少给定票数 m 的多数定罪的概率，将通过把以下按上述方式确定的若干概率相加而求得，即：

> 1st. The probability of a condemnation by an exact majority m;
>
> 第二，以下一个更大多数 m + 2 定罪的概率；

依此类推；该序列的最后一个元素是一致定罪的概率。因此，在 12 名陪审员中至少以 4 票多数定罪的概率，将为

$$X_8 + X_9 \dots + X_{12},$$

上述各项的值由(3)给出，在其中令 n = 12。

4. 当我们考虑的不是陪审团，而是由 n 人组成的简单审议会议的情形时，这些人的各自正确判断的概率以 x 表示，上述公式被其他公式所取代，这些公式由于省略了量 k 而变得稍微更简单一些。

一致决定的概率是

$$X = x^n + (1-x)^n.$$

个声音在总数中一致的概率是

$$X_i = \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{1\cdot 2\dots i}\{x^i(1-x)^{n-i} + x^{n-i}(1-x)^i\}. \qquad (4)$$

关于这一类研究，无需再作进一步说明。孔多塞、拉普拉斯、泊松以及其他作者已在相当程度上从事了这些研究，他们尤其考察了当 n 和 i 为大数时必须采用的计算与化简方式。显然，整个探究具有一种高度思辨的性质。x 和 k 的值无法通过直接观察来确定。我们只能假定它们一般在总体上都必须超过值[1]

2 ;即

前者 x 必定随着公众智识的进步而增大；而后者 k 则必定在很大程度上取决于法律执行中那些使犯罪嫌疑人被带到本国法庭面前的预备步骤。泊松曾指出，在革命时期，如法国恐怖统治期间，若将政治犯罪考虑在内，k 的值可能远低于极限[1]

2 。欧洲的历史在那些日子

更接近我们自己的那些日子，大概会证实这一观察，并且会表明，并非仅仅由于民主的狂放无度，才需要担心对无辜者的指控。

拉普拉斯作出假设，认为x的所有值都来自

$$x = \frac{1}{2};\ \text{to}\ x = 1,$$

是同等可能的。他由此排除了陪审员更可能被欺骗而非不被欺骗这一假设，但假定在个人正确判断的概率所被限制的界限之内，我们没有理由偏好 x 的某一个值而排斥另一个值。这一假说完全是任意的，在此考察其后果将是徒劳的。

泊松似乎首先致力于从经验中推断性地推出 x 和 k 的值。在1825年至1830年(含首尾)的六年中，在法国法庭上被指控犯有人身犯罪的个体数量为11016，而被判罪的人数为5286。每个陪审团由12人组成，判决以简单多数宣布。假定上述数字足够大，可用于估计概率，那么因此将有一个以分数$\frac{5286}{11016}$来度量的概率

或.4782即一名被告人将被判罪由一个

简单多数。我们应该有方程

$$X_7 + X_8 \dots + X_{12} = .4782, \qquad (5)$$

在令其中 n = 12 之后，由(3)给出 X i 的一般表达式。1831年，该法律经修改后，要求至少四人多数方可定罪，而该年因针对人身的犯罪而受审的人数为2046，被定罪者为743，则一个人以上述多数被定罪的概率为7432046,或.3631.因此我们应当有

$$X_8 + X_9 \ldots + X_{12} = .3631\,. \tag{6}$$

假设k和x的值在1831年与之前六年相同，则方程(5)和(6)使我们能够近似确定它们的值。泊松由此发现，

$$k = .5354, \quad x = .6786\,.$$

For crimes against property during the same periods, he found by a similar analysis,

$$k = .6744, \quad x = .7771\,.$$

方程组(5)(6)的解在每种情况下都导出k的两个值和x的两个值，每对值中一个大于、另一个小于[1]

[2].它被假定，在每种情况下较大的值应

被优先采用，因为人们认为被告有罪比无罪更为可能，陪审员根据证据形成正确意见比错误意见更为可能。

5. 泊松所采用的数据，尤其是1831年所提供的那些数据，显然过于不完善，不足以使我们对上述 x 和 k 的确定给予很大信任；它们在此被引入，主要也是为了方法本身的缘故。本来有可能在1825-30这六年期间，或在任何类似的时期内，记录下以每一种可能的多数票宣告的定罪数目。各个元素 X_8, X_9, ...X_{12}的值，倘若没有政策上的理由加以禁止，本来是可以准确确定的。于是，一般问题的概念便由此产生，而泊松的问题只是它的一个特例。我们应当如何从这一看来是多余的数据系统出发，确定 x 和 k 的值呢?如果保留泊松以及所有其他论及此题的作者所采用的假说，即其概率由 x 和 k 表示的事件绝对独立，我们就会被引导去构造一个由(3)型五个方程组成的系统，并或者从中选出看来最为有利的那一对特殊方程，或者用最小二乘法把该系统的各方程结合起来。关于后一种方法在此类情形中是否严格适用，可能存在疑问，尤其是如果由给定的不同方程对所给出的 x 和 k 的值彼此相差很大。库尔诺先生曾考虑过一个有些类似的问题，其中根据一个由四名法官组成的法庭中各人投票的记录，试图研究每一法官作出正确裁断的各自概率。为了确定元素 x, x', x'', x'''，他

得到八个方程，他把它们分成两组各四个方程，并且指出，如果由这些组所确定的 x, x′, x″, x‴的值之间存在任何相当大的差异，那就可以被视为一种迹象，表明法官们意见独立的假说在该特殊情形中是站不住脚的。这种研究方式的原理已在(XVIII.4)中提及。

6. 我接下来将本论著的方法应用于上述那类问题，并首先考察，法庭和审议会议的记录单独是否能提供任何关于其各个成员正确判断概率的信息；既然看来不能，其次考察，何种必要假说及其数量最能符合实际数据。

命题一。

仅从法庭或审议会议裁决的记录，不可能推演出关于其成员各个判断正确性的任何确定结论。

虽然这个命题看来只不过表达了未经辅助的良好常识的确信，但表明它容许严格的证明，将不会没有意义。让我们设想一个由 n 名成员组成的审议性集会的情形，对其判断的依赖或独立不作任何假说。设逻辑记号 x^1, x^2, ...x n 按如下定义使用，即：设一般记号 x i 表示这样的事件，它在于法庭的第 i^{th}名成员 A i 发表一个正确意见。我们将把 Prob.x^1, Prob.x^2, ...Prob.x n 的值，看作一个问题的*quæsita*，而我们必须接着研究其可能数据的表达式。

现在那些数据是事件的概率，这些事件能够用记号x^1, x^2, ...x n的确定逻辑函数来表示。令X^1, X^2, ...X m表示所讨论的函数，并令实际的数据系统为

$$\text{Prob. } X_1 = a_1, \quad \text{Prob. } X_2 = a_2, \quad \text{Prob. } X_m = a_m.$$

于是，由情形的本性本身就可以表明，X^1, X^2, ...X m 是这样的函数，如果将其中的 x^1, x^2, ...x n 分别变为 1 – x^1, 1 – x^2, ...1 – x n，它们保持不变。因此，如果记录下在某一比例的情形中投票是一致的，那么由此(假定情形足够多)所确定其概率的事件，就由该逻辑函数表示

$$x_1x_2\dots x_n + (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n),$$

一个满足上述条件的函数。再者，设记录表明，在某一比例的事例中，某个个人(假定为A^1)的投票与法庭所有其他成员的投票不同。其概率如此给出的事件，将由下述函数表示

$$x_1(1-x_2)\dots(1-x_n) + (1-x_1)x_2\dots x_n;$$

并且也满足上述条件。因此，由于意见的一致可能是真理上的一致，也可能是错误上的一致；并且，当意见分歧时，任何一方都可能对或错；显然，对于集会中任何特定状态--无论是意见的一致还是分歧--的表达，都将取决于记号 x 1 , x 2 , ...x n 的一个逻辑函数，该函数同样涉及私有记号 1 – x 1 , 1 – x 2 , ...1 – x n。但在集会的记录中，并不假定要宣布哪一组意见是对还是错。因此，函数 X 1 , X 2 , ...X m 必须仅仅是上述种类。

7. 现在按照一般方法进行，为确定Prob.x 1的值，我们应首先令函数X 1 , ...X m等于一组新记号t 1 , ...t m。由如此形成的方程

$$X_1 = t_1, X_2 = t_2, \dots X_m = t_m,$$

我们应消去记号x 2 , x 3 , ...x n，然后将x 1确定为记号t 1 , t 2 , ...t m的一个展开的逻辑函数，用以表达其概率已给出的事件。令上述消元的结果为

$$Ex_1 + E'(1 - x_1) = 0; \tag{1}$$

E and E' being function of $t_1, t_2, \dots t_m$. Then

$$x_1 = \frac{E'}{E' - E}. \tag{2}$$

Now the functions $X_1, X_2, \dots X_m$ are symmetrical with reference to the symbols $x_1, \dots x_n$ and $1 - x_1, \dots 1 - x_n$. It is evident, therefore, that in the equation E' must be identical with E. Hence (2) gives

$$x = \frac{E}{0},$$

而且很明显，在上述方程第二项的展开式中可能出现的唯一系数是00和10。前者在确定某一成分的系数时，只要赋予 t1 , ...t m 的值使得 E = 0，就会自行呈现；后者，或一个等价的结果，则在其他一切情形下呈现。因此我们可以把展开式表示为如下形式

$$x_1 = \frac{\cup}{0}C + \frac{\cup}{0}D \tag{3}$$

C和D是记号t 1 , t 2 , ...t m的构成成分，或构成成分的聚合。然后从逻辑过渡到代数，我们有

$$\text{Prob. } x_1 = \frac{c\cup}{C} = c,$$

一般规则(XVII.17)中的函数V在目前情形下归结为C。因此Prob.x 1的值完全是任意的，除非我们排除它不得超出界限0和1这一条件。Prob.的各个值

x 2, ...Prob.x n，同样也是任意的。由此并不能推出，这些任意值之间不存在依赖于数据的必然条件。然而，对此类条件的考察，理应属于第十九章的方法。

如果回到最终逻辑方程，寻求c的解释，我们得到的只是原问题的重述。因为既然C和D合起来包含t 1 , t 2 , ...t m的所有可能构成成分，我们有

$$C + D = 1;$$

并且由于 D 受系数10,的影响，显然,在其中代入以 t 1 ,-t 2 , ...t m 用 x 1 , x 2 , ...x n 表示的表达式之后，我们应当得到 D = 0。因此同样的代入会给出 C = 1。现在按照规则，c 是这样一个概率：如果由 C 表示的事件发生，则事件 x 1将会发生。因此，既然 C 等于 1，从而囊括了一切可能的情形，c 就必须被解释为事件 x 1发生的绝对概率。

在特定情况下确定最终逻辑方程的实际形式可能是有趣的。那么，假设从中导出数据的元素是不同且互斥的事件的记录。例如，设数值数据 a 1 , a 2 , ...a m 分别是不同且确定的多数派的概率。那么逻辑函数 X 1 , X 2 , ...X m 由于互斥，必须满足条件

$$X_1X_2 = 0, \ldots X_1X_m = 0, \quad X_2X_m = 0, \ \&c.$$

由此我们得到，

$$t_1t_2 = 0, \quad t_1t_m = 0, \ \&c.$$

在这些情况下，容易证明，x 1的展开逻辑值将是

$$x_1 = \frac{\upsilon}{0}(\bar{t}_1\bar{t}_2 \ldots \bar{t}_m + t_1\bar{t}_2 \ldots \bar{t}_m \ldots + t_m\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1})$$

+ 其系数为1的构成成分 θ.

在上述方程中， t 1代表1 – t 1，等等。

这些研究同样适用于这样一种情况：陪审团裁决的概率，就意见的一致与分歧而言，构成一个问题的数据。设逻辑记号 w 表示由被告人有罪所构成的事件或事态。那么本问题的函数 X 1, X 2...X m 是这样的：同时将 w, x 1 , x 2 ...x n 分别转换为 w,-x 1 ,-x 2 , ...-x n 不会在其中引起任何变化。因此，w 的最终逻辑值，以及 x 1 , x 2 , ...x n 的最终逻辑值，将以相同的形式(3)展示，并由此推出一个同样的一般结论。

因此可以确定，仅从统计文献中，不能推断出任何关于法官个人意见正确性的东西，也不能推断出

顾问、个人的罪责，或一个争议问题的功过。如果对上述这类要素的判定能够被完全归入科学的领域，那必定是凭借某种被假定的真理标准为我们提供新的数据，或者凭借某种关于各个别判断的联系或独立的假说，而后者可能为一种新的研究形式提供依据。在考察不同假说的结果时，下述一般命题将具有重要意义。

命题二。

8. *Given the probabilities of the n simple events* $x_1, x_2, \ldots x_n$, *viz.:—*

$$\text{Prob.}\, x_1 = c_1, \quad \text{Prob.}\, x_2 = c_2, \ldots \text{Prob.}\, x_n = c_n; \tag{1}$$

also the probabilities of the $m-1$ *compound events* $X_1, X_2, \ldots X_{m-1}$, *viz.:—*

$$\text{Prob.}\, X_1 = a_1, \quad \text{Prob.}\, X_2 = a_2, \ldots \text{Prob.}\, X_{m-1} = a_{m-1}; \tag{2}$$

the latter events $X_1 \ldots X_{m-1}$ *being distinct and mutually exclusive; required the probability of any other compound event* X.

In this proposition it is supposed, that $X_1, X_2, \ldots X_{m-1}$, as well as X, are functions of the symbols $x_1, x_2, \ldots x_n$ alone. Moreover, the events $X_1, X_2, \ldots X_{m-1}$ being mutually exclusive, we have

$$X_1 X_2 = 0, \ldots X_1 X_{m-1} = 0, \quad X_2 X_3 = 0, \ \&\text{c.}; \tag{3}$$

系统中任意两个成员的乘积为零。现在假设

$$X_1 = t_1, \quad X_{m-1} = t_{m-1}, \quad X = t. \tag{4}$$

那么t必须确定为x^1, ...x n , t^1, ...t m – ^{1}的一个逻辑函数。

现在由(3),

$$t_1 t_2 = 0, \quad t_1 t_{m-1} = 0, \quad t_2 t_3 = 0, \ \&\text{c.}; \tag{5}$$

t^1, ...$\bar{}$t m – ^{1}的所有二元乘积都消失。因此，t的展开表达式在具有1、0或^{0}的构成成分列表中，只能涉及

$\frac{}{0}$ for

它们的系数，例如包含以下诸因子之一，即：-

$$\bar{t}_1 \bar{t}_2 \ldots \bar{t}_{m-1}, \quad t_1 \bar{t}_2 \ldots \bar{t}_{m-1}, \ldots \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-2} t_{m-1}; \tag{6}$$

$\bar{}$t ^{1}代表1 – t ^{1}，等等。剩下要指定每个构成成分中涉及记号x^1 ...x n的那一部分；连同相应的系数。

$$X_i \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1} = 0,$$

from the very constitution of the functions. Any constituent included in the first member of the above equation would, therefore, have $\frac{1}{0}$ for its coefficient.

Now let

$$X_m = 1 - X_1 \ldots - X_{m-1}; \tag{7}$$

and it is evident that such constituents as involve $\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1}$, as a factor, and yet have coefficients of the form 1, 0, or $\frac{0}{0}$, must be included in the expression

$$X_m \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1}.$$

现在 X m 可以分解为两部分，即 X X m 和(1 – X) X m，前者是 X m 中那些见于 X 的构成元素之和，后者是那些不见于 X 的构成元素之和。显然，在 t 的展开式中(它等价于 X)，前一部分 X X m 中各构成元素的系数将为 1，而后一部分(1 – X) X m 中各构成元素的系数将为 0。因此，我们刚才所考虑的这些元素将对 t 的展开式贡献如下各项

$$XX_m \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1} + 0(1-X)X_m \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1}.$$

再者，由于 X ^{1} = t ^{1}，而 X ^{2} t ^{1} = t ^{2} t ^{1} = 0，等等，显然，唯一以 t $^{1-}$ t ^{2} ... $^-$ t m – ^{1}为因子、且其系数具有 1、0 或^{00},将被包含于该表达式形式的构成元素

$$X_1 t_1 \bar{t}_2 \ldots \bar{t}_{m-1};$$

and reasoning as before, we see that this will contribute to the development of t the terms

$$XX_1 t_1 \bar{t}_2 \ldots \bar{t}_{m-1} + 0(1-X)X_1 t_1 \bar{t}_2 \ldots \bar{t}_{m-1}.$$

Proceeding thus with the remaining terms of (6), we deduce for the final expression of t,

$$\begin{aligned} t = {} & XX_m \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1} + XX_1 t_1 \bar{t}_2 \ldots \bar{t}_{m-1} \ldots + XX_{m-1} \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-2} t_{m-1} \\ & + 0(1-X)X_m \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1} + 0(1-X)X_1 t_1 \bar{t}_2 \ldots \bar{t}_{m-1} + \ \&\text{c.} \\ & + \text{terms whose coefficients are } \frac{1}{0}. \end{aligned} \tag{8}$$

在此表达式中须注意，X X m表示那些为X和X m所共有的构成成分之和，该和实际上是通过按照逻辑演算的规则将X和X m相乘而给出的。

在从逻辑过渡到代数时，我们将用(X X m)表示上述乘积在完成乘法、或选出共同构成成分之后，当我们赋予记号x ^{1}，...x n以量的意义时所变成的东西。作此理解，根据一般规则(XVII.17)，我们将有

$$\text{Prob. } t = \frac{(XX_m)\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1} + (XX_1)t_1 \bar{t}_2 \ldots \bar{t}_{m-1} + (XX_{m-1})\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-2} t_{m-1}}{V}, \tag{9}$$

$$V = X_m \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1} + X_1 t_1 \bar{t}_2 \ldots \bar{t}_{m-1} \ldots + X_{m-1} \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-2} t_{m-1} \tag{10}$$

whence the relations determining $x_1, \ldots x_n, t_1, \ldots t_{m-1}$ will be of the following type (i varying from 1 to n),

$$\frac{(x_i X_m)\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1} + (x_i X_1) t_1 \bar{t}_2 \ldots \bar{t}_{m-1} + (x_i X_{m-1})\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-2} t_{m-1}}{c_i}$$

$$= \frac{X_1 t_1 \bar{t}_2 \ldots \bar{t}_{m-1}}{a_1} \ldots = \frac{X_{m-1}\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-2} t_{m-1}}{a_{m-1}} = V. \tag{11}$$

从上述系统中，我们接下来将消去记号t ^{1} , ...t m – ^{1}。我们有

$$t_1 \bar{t}_2 \ldots \bar{t}_{m-1} = \frac{a_1 V}{X_1}, \quad \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-2} t_{m-1} = \frac{a_{m-1} V}{X_{m-1}}. \tag{12}$$

将这些值代入(10)，我们得到

$$V = X_m \bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1} + a_1 V \ldots + a_{m-1} V.$$

因此，

$$\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1} = \frac{(1 - a_1 \ldots - a_{m-1})V}{X_m}.$$

现在让我们t

$$a_m = 1 - a_1 \ldots - a_{m-1}, \tag{13}$$

中是我们有have

$$\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_{m-1} = \frac{a_m V}{X_m}. \tag{14}$$

现在借助(12)和(14)化简方程(9)，以及将(11)的第一行等于记号V所形成的方程；又用Prob.X代替Prob.t，我们有

$$\text{Prob. } X = \frac{a_1(XX_1)}{X_1} + \frac{a_2(XX_2)}{X_2} \ldots + \frac{a_m(XX_m)}{X_m}, \tag{15}$$

$$\frac{a_1(x_i X_1)}{X_1} + \frac{a_2(x_i X_2)}{X_2} \ldots + \frac{a_m(x_i X_m)}{X_m} = c_i; \tag{16}$$

其中 X m 和 a m 由(7)和(13)给出。这些方程涉及对所考虑问题的直接求解。在(16)中，我们得到 n 个方程的类型(通过依次给 i 取值 1 , 2 , ...n 而形成)，由此将求得 x ^{1} , x ^{2} , ...x n 的值，将这些值代入(15)即给出 Prob .X 作为常数 a ^{1}、c ^{1}等等的函数的值。

从上述解答可以推出一个值得注意的结论，即：如果复合事件 X ^{1} , ...X m – ^{1}的概率，与假定事件 x ^{1} , ...x n 完全独立且具有给定概率 c ^{1} , ...c n 时它们将会具有的概率相同，那么事件 X 的概率就将与按照事件 x ^{1} , ...x n 绝对独立的同一假说所计算出的概率相同。因为在所设的假说下，该假定

x 1 = c 1, x n = c n，在量的系统中将给出X 1 = a 1, X m = a m，由此(15)和(16)将给出

$$\text{Prob. } X = (XX_1) + (XX_2) \ldots + (XX_m), \tag{17}$$

$$(x_i X_1) + (x_i X_2) \ldots + (x_i X_m) = c_i. \tag{18}$$

但既然X 1 + X 2 ...+ X m = 1，显然(17)的第二项将由取X中所含的全部构成成分并赋予它们代数意义而形成。类似的评述也适用于(18)。由此那些方程分别给出

Prob .X(逻辑的)= X(代数的),

$$x_i = c_i.$$

Wherefore, if $X = \phi(x_1, x_2, \ldots x_n)$, we have

$$\text{Prob. } X = \phi(c_1, c_2, \ldots c_n),$$

这就是所讨论的结果。

由此还可推出，如果量c 1 , ...c n是不确定的，且未就具有某一共同平均值作出任何假说，那么系统(15)(16)将通过赋予这些量以任何满足方程的值x 1 , x 2 , ...x n而得到满足

$$X_1 = a_1 \ldots X_{m-1} = a_{m-1}, \quad X = a,$$

假定元素a的值，如同a 1 , ...a m – 1的值一样，是由经验给出的。9. 在将一般解(15)(16)应用于判断概率问题之前，作如下变换将是方便的。令数据为

$$x_1 = c_1 \ldots x_n = c_n,$$
$$\text{Prob. } X_1 = a_1 \ldots \text{Prob. } X_{m-2} = a_{m-2};$$

并设要求确定Prob .X m – 1，其未知值我们将用a m – 1表示。那么在(15)和(16)中我们必须改变

$$\begin{array}{ll} X \text{ into } X_{m-1}, & \text{Prob. } X \text{ into } a_{m-1}, \\ X_{m-1} \text{ into } X_{m-2}, & a_{m-1} \text{ into } a_{m-2}, \\ X_m \text{ into } X_{m-1} + X_m, & a_m \text{ into } a_{m-1} + a_m; \end{array}$$

作这些变换，并注意到(X m – 1 X r) = 0，除非r = m – 1，且此时它等于X m – 1，方程(15)(16)给出

$$a_{m-1} = \frac{(a_{m-1} + a_m)X_{m-1}}{X_{m-1} + X_m}, \tag{19}$$

$$\frac{a_1(x_iX_1)}{X_1}\ldots+\frac{a_{m-2}(x_iX_{m-2})}{X_{m-2}}+\frac{(a_{m-1}+a_m)(x_iX_{m-1}+x_iX_m}{X_{m-1}+X_m}. \tag{20}$$

Now from (19) we find

$$\frac{X_{m-1}}{a_{m-1}}=\frac{X_m}{a_m}=\frac{X_{m-1}+X_m}{a_{m-1}+a_m},$$

凭借这一点，(20)式的最后一项可以化为以下形式

$$\frac{a_{m-1}(x_iX_{m-1})}{X_{m-1}}+\frac{a_m(x_iX_m)}{X_m}.$$

With these reductions the system (17) and (18) may be replaced by the following symmetrical one, viz.:

$$\frac{X_{m-1}}{a_{m-1}}=\frac{X_m}{a_m}, \tag{21}$$

$$\frac{a_1(x_iX_1)}{X_1}+\frac{a_2(x_iX_2)}{X_2}\ldots+\frac{a_m(x_iX_m)}{X_m}=c_i. \tag{22}$$

这些方程，连同(7)和(13)，使我们能够确定 a m – 1 ，作为 c 1 ...c n , a 1 ...a m – 2的函数，其中的数值数据被假定由经验提供。我们现在着手它们的应用。

命题三。

10. 给定由记录到的一致同意事例、或审议性集会决议中指定的数值多数所引出的任何概率系统；要求在某一确定的假说下，求出集会中某一成员作出正确判断的平均概率。

一致判决和特定数值多数派的概率可以以何种方式从经验中确定，已在本章前一部分中有所提示。采用命题 i.的记号，我们将用函数 X 1 , X 2 , ...X m – 1来表示其概率已给定的那些事件。从情况的本质来看，这些事件是互斥的，并且用以表示它们的函数关于记号 x 1 , x 2 , ...x n 是对称的。我们继续在与命题 i.相同的意义上使用这些记号，即，我们用 x i 来理解那个由集会中第 i 个成员形成正确意见所构成的事件。

经验的直接材料是--

$$\text{Prob. } X_1=a_1,\quad \text{Prob. } X_2=a_2\ldots\text{Prob. } X_{m-2}=a_{m-2}, \tag{1}$$

$$\text{Prob. } X_{m-1}=a_{m-1}. \tag{2}$$

X 1 ...X m – 1是逻辑记号 x 1 , ...x n 的函数，对于这些记号所表示的事件的概率，我们将赋予不确定值 c。于是我们将有

$$\text{Prob. } x_1=\text{Prob. } x_2\cdots=\text{Prob. } x_n=c. \tag{3}$$

现在我们已经看到，命题 i.表明，直接材料(1)(2)在没有任何假说辅助的情况下，仅仅引导我们重新陈述问题。另一方面，显而易见的是，如果我们采用拉普拉斯和泊松的方法，仅仅把系统(3)作为应用本工作方法的材料，最后将所得结果与实验系统(1)(2)进行比较，我们便完全依赖一个可疑的假说--个体判断的独立性。但是，尽管我们不应完全依赖这个假说，我们也不能完全抛弃它，或抛弃某种等效的替代物。那么，让我们考察个体判断的有限独立性的后果；限制的条件由那些表面上多余的材料提供。从系统(1)(3)出发，让我们用本工作的方法确定 Prob.X m – 1，并将结果与(2)比较，确定 c。即使在这里，也要求一种任意的选择权力。但从命题 i.可以明显看出，如果我们要得到一个确定的解，某种这类东西是不可避免的。至于选择的原则，我理解，留作最终比较的方程(2)应当是那个因其数值元素 a m – 1 的大小而被认为是由经验提供的主要系列中最重要的方程。

现在，由于函数 X ^{1} , X ^{2} , ...X m – ^{1}所表示的事件的互斥性质，前一命题的结论方程变得适用。由于这些函数的对称性，以及由 c i 所表示的数值系统归结为单一值 c，由(22)所表示的方程变得完全相同，x ^{1} , x ^{2} , ...x n 的值变得相等，并可由单一值 x 代替，于是我们简单地有，

$$\frac{X_{m-1}}{a_{m-1}} = \frac{X_m}{a_m}, \tag{4}$$

$$\frac{a_1(xX_1)}{X_1} + \frac{a_2(xX_2)}{X_2} \ldots + \frac{a_m(xX_m)}{X_m} = c. \tag{5}$$

The following is the nature of the solution thus indicated:

The functions $X_1, \ldots X_{m-1}$, and the values $a_1, \ldots a_{m-1}$, being given in the data, we have first,

$$X_m = 1 - X_1 \ldots - X_{m-1},$$
$$a_m = 1 - a_1 \ldots - a_{m-1}.$$

从如此给定或确定的每个函数 X ^{1} , X ^{2} , ...X m 中，我们必须选出那些含有一个特定记号作为因子的成分，如 x ^{1}。这将确定函数(xX ^{1})、(xX ^{2})等等，然后在所有函数中我们必须将 x ^{1} , x ^{2} , ...x n 逐一变为 x。或者我们可以将系统(4)(5)中的任何代数函数 X i 视为表示逻辑函数 X i 所表示的事件的概率，前提是逻辑记号 x ^{1} , x ^{2} , ...x n 表示其共同概率为 x 的独立事件。在同一前提下，(xX i)将表示系列 x ^{1} , x ^{2} , ...x n 中任何特定事件与 X i 同时发生的概率。在 X i、(xX i)等等的形式确定之后，方程(4)给出 x 的值，而这个值，

代入(5)后，确定所需的元素 c 的值。在其解将提供的两个值中，一个大于、另一个小于12,
当根据一般考虑认为集会成员正确判断比错误判断更为可能时，必须选择较大的那个值。
–

那么在这里，根据所假定的原则，即 a m – 1中的最大值应留待方程(2)中作最终比较，我们就对所提出的问题拥有一个确定的解。而且，如果系统中的任何其他方程，基于任何其他理由，例如更高的精确性，被同样地留出以代替(2)，同一形式的解仍然适用。

11. 让我们考察上述保留在多大程度上影响了最终的解。显然，方程(5)与所讨论的选择完全无关。(4)的第二项同样如此。如果我们保留函数 X 1，而不是 X m – 1，那么用于确定 x 的方程将是

$$\frac{X_1}{a_1} = \frac{X_m}{a_m}, \tag{6}$$

但由此确定的 x 的值仍须代入同一个最终方程(5)。我们知道，若事件 x 1 , x 2 , ...x n 确实独立，则方程(4)、(6)以及它们作为其类型的其他一切方程都将被证明是等价的，而由其中任何一个所提供的 x 的值都将是 c 的真值。这提供了一种验证(5)的手段。因为若该方程正确，则在上述情形下，它应当由假设 c = x 所满足。换言之，方程

$$\frac{a_1(xX_1)}{X_1} + \frac{a_2(xX_2)}{X_2} \ldots + \frac{a_m(xX_m)}{X_m} = x \tag{7}$$

在求解时，应当给出与方程(4)或(6)相同的 x 值。现在情况将会如此。因为根据假说，

$$\frac{X_1}{a_1} = \frac{X_2}{a_2} \ldots = \frac{X_m}{a_m},$$

由一定理可知，

$$\frac{X_1}{a_1} = \frac{X_2}{a_2} \ldots = \frac{X_m}{a_m} = \frac{X_1 + X_2 \ldots + X_m}{a_1 + a_2 \ldots + a_m} = 1.$$

因此，以 a 1代换 X 1等等之后，(7)变为

$$(xX_1) + (xX_2) \ldots (xX_m) = x$$

一个纯粹的同一式。

因此，只要事件x1, x2, . . . xn真正独立，系统(4)(5)就是正确的，并且独立于获得它的过程第一步的任意性。当所述事件不独立时，最终的方程系统将具有，暂时搁置

上述选择原则，是一个任意的元素。但从方程(5)的持久形式可以推断，该解在任意性程度上低于各个别判断绝对独立的假说所会引导我们得出的那些解。关于c的值以x的值为转移的界限的讨论，将会确定这样的要点。

这些考虑向我们提出了这样一个问题：方程(7)关于函数 X ^{1} , X ^{2} , ...X m 是对称的，不含任何任意元素，并且当事件 x ^{1} , x ^{2} , ...x n 确实独立时是严格精确的，那么它是否可以被接受为该问题的一种平均的一般解。我认为，确定这一点的恰当方式将是查明：它所提供的 x 的值是否一般会落在 c 的值的界限之内，而后者是由以系统(4)、(5)为其类型的那些方程系统所确定的。在通常情形下，情况似乎很可能如此。然而，独立于这类考虑，我们可以把(7)本身视为某种解的原则的表述，即：把 X ^{1} , X ^{2} , ...X m 视为其概率为 x 的事件的排他性原因，我们从经验中接受那些原因的概率 a ^{1} , a ^{2} , ...a m，但把该事件依赖于这些原因的条件概率构造成

$$\frac{(xX_1)}{x_1}, \quad \frac{(xX_2)}{X_2}, \text{ \&c. (XVII. Prop I.)}$$

在个别判断独立的假说之下，并由此推出方程(7)。然而我认为，这是一种不如一般解法中所采用的那样严格、尽管在实践中可能更为方便的程序方式。

12. 现在只剩下指出上述方程中的代数函数 X i、(xX i) 等在逻辑函数 X i 表示由 r 名成员以一方投票、n – r 名成员以另一方投票所构成的那个事件时所采取的具体形式。显然，在此情形下，代数函数 X i 所表达的是：若事件 x ^{1} , x ^{2} , ...x n 独立，且其共同概率以 x 度量，则所设事件的概率将会是什么。因此，根据第3条，我们应当有

$$X_i = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \dots r}\{x^r + (1-x)^{n-r}\}.$$

在同一情形下，(xX i) 将表示复合事件的概率，该复合事件由议会中某一特定成员作出正确判断与上述记录的一般投票状态共同构成。因此，它将是如下情形的概率：某一特定成员投票正确，而在其余 n – 1 名成员中，有 r – 1 名投票正确；或者同一成员投票正确，而在其余 n – 1 名成员中有 r 名投票不正确。因此

$$(xX_i) = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \dots r-1}x^r + \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-r)}{1 \cdot 2 \dots r}x^{n-r}.$$

命题四。

13. 给定从记录到的一致同意事例、或刑事法庭判决中指定的数值多数中得出的任何概率系统，要求在与上一命题相似的假说之下，求出法庭成员正确判断的平均概率，以及被告人有罪的一般概率。

这个问题的解与上一个问题的解只有细微差别，可以归到同一组一般公式(4)和(5)，或(7)。应当注意，由于有两个元素 c 和 k 需要确定，就必须保留两个函数 X ^{1} , X ^{2} , ...X m – ^{1}，让我们假定 X ^{1}和 X m – ^{1}作最终比较，在数据的表达中或者采用其余 m – 3 个函数，或者采用两个各自的集合 X ^{2} , X ^{3} , ...X m – ^{1}和 X ^{1} , X ^{2} , ...X m – ^{2}。无论哪种情形，都假定必须至少有两个原始独立数据。若仅采用方程(7)，则在当前情形下它将提供两个方程，可写成如下形式：

$$\frac{a_1(xX_1)}{X_1} + \frac{a_2(xX_2)}{X_2} \ldots + \frac{a_m(xX_m)}{X_m} = x, \tag{1}$$

$$\frac{a_1(kX_1)}{X_1} + \frac{a_2(kX_2)}{X_2} \ldots + \frac{a_m(kX_m)}{X_m} = k. \tag{2}$$

这些方程将按以下方式使用：- 设 x ^{1} , x ^{2} , ...x n 分别表示那些由法庭成员形成正确意见的事件。又设 w 表示由被控成员有罪所构成的那个事件。借助这些记号，我们可以在逻辑上表达函数 X ^{1} , X ^{2} , ...X m – ^{1}，其概率已给出，也可表达函数 X m。然后从函数 X ^{1}中选出那些以集合 x ^{1} , x ^{2} , ...x n 中任一特定记号作为因子的成分，也选出那些以 w 作为因子的成分。在两个结果中，将 x ^{1} , x ^{2} , ...x n 分别变为 x，并将 w 变为 k。上述结果将给出(xX ^{1})和(kX ^{1})。在整体上施行同样的变换，系统(1),(2)将根据所涉及的特定假说确定 x 和 k。

14. 我们可以从上述考察中汇集以下事实和结论：

第一，仅凭任何一群人意见中一致与分歧的记录，既不能就其中个别成员作出正确判断的概率得出任何确定的数值结论，也不能就该群体所审议的问题的价值得出任何确定的数值结论。

第二，这样的结论可以依据若干不同的假说得出，即：第一，依据各个判断绝对独立的通常假说；第二，依据由实际数据所保证的对该假说的某些确定修正；第三，依据一种独特的解法原则，该原则是由上述修正所得的解中出现共同形式而提示的。

最后，无论最终结果有何疑问，都不在于方法的不完善，因为该方法同样适用于所有情况

假设，而是基于假设本身的不确定性。

然而，似乎很可能的是，即使在假说的最宽泛限度内，只要与考虑所有经验材料相一致，所得结果的偏差也只会是微小的，并且它们的平均值可以借助命题III的方法以极大的信心确定。在那些方法中，我倾向于优先选择第一种。一旦商定了这样一种平均解原则，其他考虑似乎表明，对于具有确定宪制、并在其审议中受固定规则支配的法庭和议会，c 和 k 的值将几乎保持恒定，然而会受制于一种小的长期变化，这种变化取决于人类知识和正义的进步。目前适合确定它们的材料即使有，也很少。

第二十二章

论科学的性质与智力的构成

1. 我所理解的一个系统的 constitution，是指那些原因和倾向的总和，这些原因和倾向在系统被认为适应的那些条件下不受干扰地运作时，产生其被观察到的特性。我们对这种适应的判断必须建立在对以下情况的研究之上：系统在其中达到最自由的作用、产生最和谐的结果，或以某种其他方式实现其构造的明显设计。有些情况是我们清楚地知道一个系统的运作所依赖的原因，也知道它的条件和目的。这是相对于所考虑的主词而言最完美的一种知识。也有些情况是我们只能不完善地或部分地知道起作用的原因，但仍然能够在某种程度上确定其作用的规律，并且在此之外发现一般倾向并推断进一步的目的。因此，我认为正确地，人们得出结论说我们的本性中有一种道德能力，不是因为我们能够理解它运作的特殊工具，如同我们把器官与视觉能力联系起来那样，也不是因为人们在采纳普遍行为规则上一致；而是因为，虽然道德赞许或不赞许的情感以某种形式在所有人身上表现出来，但无论在哪里只要人类进步可被观察，无论在哪里社会不是停滞就是趋于衰败，它都倾向于同时附着于某些类别的行为，并且以一种既表明持久性又表明规律性的方式附着于它们。秩序的表现总是并且处处提供一种推定--确实不可度量，但却是真实的(XX.22)--即某个目的或意图得到实现，以及有序因果关系的基础存在。

2. 几乎无需说，关于理智 constitution 的这一特定问题，在每个时代都吸引了思辨才智的努力。因为它不仅诉诸于古代思想最伟大的大师们相信内在于我们物种中的那种知识欲，而且在这种动机的通常力量之外，又加上了人类的和个人的兴趣的诱因。对真理的真正献身，确实很少在其目标上是偏狭的，但当它促使人们漫游于外部

3. 在那些关于理智构造、可被视为属于实证知识领域的结论中，我们可以计入已构成本论著一般方法之基础的思维与推理的科学规律，以及第五章中据以确定其应用的那些原则。将思想领域划分为两个不同但共存的领域(IV.XI.)；使

很可能，如果这样一种信念--即这类思辨毫无希望地贫瘠--是普遍的，那么在对真理的真诚探究者中间，这种努力的顽强性就不会维持下去。我们可以设想，人们已经感到：如果某种错误和不确定性--总是伴随部分信息状态而来--必定附着于这类探究的结果，那么仍可能留下一点实证知识；所遇到的反驳更多是言辞上的而非实质上的；最重要的是，甚至或然的结论也在这里从其主词中获得一种兴趣和价值，使它们并非不值得在物理科学更确定、更辉煌的结果旁边受到重视。这样的考虑似乎是完全正当的。尽管与探究心灵的本性和 constitution 有关的许多问题必须被假定为不可解，但也不乏另一些问题，对它们可以获得有限但并非可疑的知识，另一些问题，对它们可以获得高度或然类比的结论。正如白昼与黑夜的领域并非严格接壤，而是被一个朦胧地带分隔开来，通过这个地带，一方的光逐渐消隐于另一方的黑暗之中，同样可以说，每一个实证知识领域都被一个可争论的和思辨的领域所环绕，它在一定程度上将其影响和光照扩展到那个领域之上。因此，可能存在一些与理智 constitution 有关的问题，尽管在目前的知识状态下它们不允许绝对的决定，却可能接受如此多的反射信息，以致它们的或然解决并不困难；也可能存在一些与科学的性质、甚至与科学的特定真理和学说有关的问题，对于这些问题，接受本著作一般原则的人不可能不被引导去持有确定的意见，这些意见也许不同于当今通常接受的意见。[1]在下文中，我将重述本论著前几部分所建立的若干较为确定的结论，然后指出一两条与上述一般对象相关的思路，我认为这些结论似乎能够提示这些思路。

3. 在那些与理智的构造有关、可以被视为属于实证知识领域的结论之中，我们可以计入那些构成本论著一般方法之基础的思维与推理的科学规律，连同第五章中据以确定其应用的那些原则。将思维领域分解为两个不同但共存的领域(IV.XI.)；使

1 下面的例示或许足够：--

一些现代最权威的语法学家主张，连词只连接命题。现在，不必直接探究这一观点是否成立，显而易见的是，任何承认本论著科学原理的人都不能一贯地坚持它；因为对这些人来说，这似乎意味着要么否认执行的可能性，要么否认表达一种心智活动的可能性，而这种心智活动的规律，从这两种关系来看，已在本著作中得到了研究和应用--(Latham，《论英语语言》；John Stoddart 爵士，《普遍语法》，等等)

理智的操作在这些领域内被归于一个共同的规律体系(XI.)；这些规律的一般数学特征及其实际表达(II.III.)；它们与数领域中的思维规律的亲缘程度，以及它们与思维规律分歧之处；宇宙与永恒这两个极限概念在逻辑所关注的一切思维对象中所具有的主导特征；这些概念与数科学中统一性这一基本概念的关系，--这些以及许多类似的结果，不应被列为仅仅是或然的或类比的结论，而应被视为科学的真理。它们是否被称为形而上学的，无关紧要。它们所依据的证据之性质，虽然在种类上不同，但在价值上并不逊于任何可以用来支持物理科学一般真理的证据。

再者，人们一致认为，在所有较精确的知识形式之进展中，可以观察到某种秩序。对物理科学每一个部门的研究都始于观察，它通过事实的整理而推进到对它们联系规律的推定性的认识，这种推定性的有效性，它通过新的实验来检验，这些实验被设计得使这种推定如果是确有根据的，其概率就会无限增大；最后，当现象规律已以足够的信心被确定下来，对原因的研究，通过假说与演绎的适当混合来进行，便为探究加冕。在这种知识的前进秩序中，本著作所考察其性质的那些特殊能力与规律各自有其作用。因此，显而易见，如果我们想要不偏不倚地研究科学的性质，或研究理智构造在其与科学的关系中的性质，上述两个系列中的任何部分都不应被视为孤立的。尤其是那些彼此处于任何种类的补充关系中的真理，更应在它们相互的关联与联系中加以考察。

4.因此，一切实证知识都需要一个实验基础，这一必要性，与那套已被予以关注的心理规律、原则和操作体系的存在及其特殊性质联系起来看，倾向于阐明一些思辨思想界在很大程度上仍然为之分裂的重要问题。我们如何从经验所呈现的特殊事实达到科学的一般命题?这些命题的性质是什么?它们仅仅是经验的汇集，还是心灵提供了某种自身的连接原则?一言以蔽之，科学真理的性质是什么，它要求被接受的那种信心的根据又是什么?

对于上述这类问题，不可能给出单一的、一般的答案，这一点必定是显而易见的。有些情况下它们甚至不需要讨论。有些实例是熟悉的，其中一般命题仅仅表达*per enumerationem simplicem*，即一个由实际观察在该命题所适用的一切情况中确立的事实。天文学家据此断言，所有已知行星都自西向东绕太阳运行。但也有一些情况，其中一般命题是从对其在特定实例中的真理性的观察，以及将该真理性扩展到

未观察到的实例而被假定的。仅仅演绎推理的原则不能为这样的程序提供保证。当开普勒从对火星的大量观察中推断它沿椭圆运行，这个结论大于他的前提，或者实际上大于任何仅仅观察所能给予的前提。那么，还需要什么其他要素才能赋予这类概括以哪怕前瞻性的有效性呢?那就是我们本性中固有的领会秩序的能力，以及同时存在的推定--无论其根据如何--即自然现象是由一个秩序原则联系在一起的。没有这些，物理科学的一般真理就永远不可能被确定。就算承认这样建立起来的程序只能引导我们达到或然的或近似的结论；那也只是说明，物理科学的较大部分概括只具有或然的或近似的真理性。知识之占有权的安全性在于这一点：凡是这类结论确实真正代表了自然的构造，我们对它们真理性的信心就会得到无限的确认，并很快变得与确定性无法区分。上述被表述为归纳推理基础的那个原则的存在，使我们能够解决关于推理中一般命题之必要性的那个争论甚多的问题。逻辑学家断言，从特称前提不可能推出任何结论。现代享有盛誉的作家们主张，一切推理都是从特殊到特殊的真理。他们举例说，在从一个类的某些成员具有某种属性推出另一些成员也具有该属性时，没有必要确立那个中间一般结论，即断言该类的所有成员共同具有该属性。现在，无论是否如此，推理所依据的那个秩序或类比原则，必须被陈述或被领会为一个一般真理，才能赋予最终结论以有效性。至少在这种形式中，一般命题作为推论基础的必要性得到了确认，--然而，我认为这种必要性蕴含于那些能力的存在本身之中，更蕴含于本著作所考察其规律的那些能力的特殊性质之中。因为如果仔细分析推理过程，就会看出，它抽去了结论所指涉的个体的全部特殊性，而将注意力局限于那些界定其类属性的属性。

5. 但是，除了由经验事实归纳而来的一般命题之外，还存在属于所谓必然真理领域内的其他命题。算术的一般命题，以及表达本论著所依据的思维规律的一般命题，即属此类；这些命题不仅能够在特殊事例中得到严格的验证，而且通过对特殊事例的研究而在其全部普遍性中得以显明。再者，还存在表达必然真理但在感官的不完善之下无法被精确验证的一般命题。几何学的某些命题(如果不是全部的话)即属此种性质；但此类命题并非仅见于几何学领域。关于其性质与起源的问题是一个极为古老的问题，并且由于它比任何其他所提及的问题都更为紧密地与对理智构造的探究相关联，

在此处加以考虑并非不相干。关于此一主题最为流行的观点如下。有人主张，所提及的那类命题独立于经验而存在于心灵之中，而作为其主词的那些概念则是永恒原型的印记。柏拉图以其理想世界赋予了此类原型--尽管这些原型被设想为具有一种实在性，而一切感官对象不过是其微弱的影子或模糊的暗示。另一方面，则有各种不同的主张：此类命题的主词是个别经验对象的摹本；它们仅仅是名称；它们本身就是个别的经验对象；而关于它们的命题由于那些对象的不完善而只是部分地为真；最后，它们是通过从对个别事物的感性知觉中抽象而形成的理智产物，但其形成方式使之成为个别事物永远不可能成为的东西，即科学的主词，亦即可以对其肯定精确而普遍命题的主词。或许还存在其他观点，其中有些以感性元素为主，另一些则以理智的或观念的元素为主。

现在，如果采取上述最后一种观点(因为此处不拟考虑纯粹观念的或纯粹唯名论的观点)，并且如果追问在上述意义上什么是科学的真正对象--即其命题在其中为真而丝毫不掺杂错误的那些对象--那么可以设想只能给出一个答案。那就是：个别经验对象，以及它们所暗示的心理影像(就其全部可能性而言)，都不严格具有这一称号的资格。看来可以确定的是，无论在自然中还是在技艺中，我们都遇不到任何与直线、三角形或圆的几何定义绝对符合的东西，尽管其偏差可能为感官所不可觉察；而且至少可以设想为可疑的是，我们能否形成一个完美的心理影像或概念，使之与上述定义的符合更为精确。但无可怀疑的是，此类概念尽管不完善，确实指向自身之外的某种东西，在向其逐渐接近的过程中一切不完善都趋于消失。尽管完美的三角形、正方形或圆不存在于自然之中，逃避我们一切表象概念的能力，并且仅在思想中作为无限抽象过程的极限而呈现于我们，然而凭借知性的一种奇妙能力，它可以成为绝对为真的命题的主词。理性的领域由此向我们显示为比想象的领域更为广阔。诚然，如果有人以为我们能够以严格的精确性为自己描绘出形式、方向、大小等等的科学元素，那么在这些人的观点中，这些事物正如实际被设想的那样，将是科学的真正对象。但如果--在我看来这是更为公正的意见--我们一切精确地实现这些元素的尝试都带有不可治愈的不完善性，那么我们只能断言：外部对象在现实中，或想象的概念通过抽象，越是接近某些极限状态--这些状态也许永远不能被实际达到--关于那些事物或概念的科学一般命题就越是接近绝对真理，而其实际偏差则趋于消失。在某种

程度上，同样的观察也适用于物理科学。那些被称为各门科学的“基本观念”的东西，如力、极性、结晶等等，[2]在我看来，既不是独立于经验的理智产物，也不是外部事物的单纯摹本；而是，一方面它们在经验中有其必然的前件，另一方面它们的形成需要抽象能力的运用，这种运用服从于我们本性中某种普遍的才能或倾向，这种才能或倾向永远驱使我们从事研究，并使我们有资格鉴赏秩序。[3]因此，我们通过参照行星是完美球体或椭球体的极限假设，近似地研究引力对天体运动的结果。我们通过一个抽去一切温度干扰影响的过程，近似地确定光线穿过大气的路径。人类知识的一切较高领域中的程序次序莫不如此。与这些理智过程相关联而值得注意的，是那种从感官的不完善表象和个别经验的多样性上升到对普遍的、也许是永恒真理的知觉的倾向以及相应的能力。凡此种倾向与能力相结合之处，自然中每一系列相互关联的事实都可以提供一种比其直接显现的秩序更为精确的秩序的暗示。因为它可以作为那些能力之运用的根据和契机，而那些能力的职责在于把握普遍真理--这些真理在变化现象的世界中确实得到例证，但从来不是以完美的忠实得到例证的。

6. 思维规律的终极规律在其形式上是数学的这一真理，与错误之可能性这一事实联系起来看，为某些值得注意的结论确立了根据。如果我们仅仅注意科学真理，我们可能被引向推断：理智操作与外部自然的运动之间存在着几乎精确的平行关系。假设任何一位熟悉物理科学但不习惯于反思自身能力之性质的人被告知，那些能力的规律已被证明是数学的；很可能在最初的怀疑感消退之后，会产生这样的印象：思想的秩序因此必定像物质宇宙的秩序一样必然。我们知道，在自然科学的领域中，绝对的

2 休厄尔《归纳科学哲学》，第71、77、213页。

3 关于秩序的观念，有人曾深刻地说过，它自身之内就带有自己的辩护或自己的制约，我们各种官能的可靠性正是由其结果是否符合一种满足理性的秩序来评判的。“秩序观念的特殊与卓越之处在于，它自身之内就带有自己的辩护或自己的制约。要发现我们的其他官能是否欺骗我们或没有欺骗我们，我们考察它们给予我们的观念是否按照一种满足理性的秩序相互联系或不相联系。”--库尔诺，《论我们知识的基础》。既然承认这一原则为我们无疑具有的那些抽象能力的向导，那么假定各科学的基本观念不能从经验中导出，似乎是不合哲学的。毫无疑问，赋予我们用以理解现实世界的能力，在一个构造不同的场景中也会对我们有用，只要秩序的统治以某种形式仍然得到维持。可以设想，在这样一个新的思辨舞台上，理智程序的规律保持不变，而各科学的基本观念则可能与我们目前所知的那些完全不同。

一个问题的初始元素与最终元素之间的联系，以数学形式展示出来，恰当地象征着将结果与原因结合在一起的物理必然性。无机世界中状态与条件的必然序列，以及应用于其上的精确证明过程中前提与结论的必然联系，似乎是同等的。这可能是一个问题：术语“必然的”最初应用于这两个序列中的哪一个；是应用于观察到的自然的恒常性，还是应用于关于自然作品的 all 有效推理中命题之间不可分解的联系。从历史上看，我们或许应偏重前者，从哲学上看则偏重后者。但联系的事实是无可争辩的，它所指向的类比也是明显的。

那么，如果有效的推理规律被一致地遵守，那么在理智的运作与外部自然的运作之间就会存在一种非常紧密的平行关系。服从于在其形式和表达上都是数学的规律，甚至是服从于一种绝对的服从，就会在两个序列上打上一种共同的特征。必然性对理智世界和物理世界的统治同样会是完整而普遍的。

然而，尽管对外部自然的观察以日益增强的证据证明这一事实：运作的一致性和对既定规律的始终不渝的服从在其整个领域中盛行，但只要稍加注意理智世界的过程，就会向我们揭示另一种事态。推理的数学规律，确切地说，只是正确推理的规律，而它们的实际违反是一个反复出现的现象。错误在物质系统中没有位置，在这里却占据很大的位置。我们必须把这接受为那些终极事实之一，其起源的确定超出科学的范围。我们必须承认存在一些规律，即使其数学形式的严格性也不能使它们免于被违反。我们必须赋予它们一种权威，其本质不在于力量，一种至高地位，自然世界不可侵犯的秩序的类比绝不能帮助我们理解。

既然如此指出的区别是真实的，它就不受我们对心理构造其他部分的看法中任何特殊性的影响。如果我们把理智视为自由的，而这显然是与此类思辨的一般精神最相符的观点，那么它的自由必须被视为与必然性的统治相对立，而不是与真理的某种正当至高地位的存在相对立。正确推论的规律可能被违反，但尽管如此，它们并不因此就不存在。如果采取极端形式的必然性假说，它们在性质和权威上也同样不受影响。姑且承认，有效推理的规律--如它们在本著作中被确定的那样，或者更一般地说，如它们在详尽分析的结论中最终会呈现的那样--只是支配实际推理过程(无论正确还是错误)的规律体系的一个部分。姑且承认，如果我们完整地认识那个体系，我们就会觉察到整个理智程序是必然的，正如无机世界的运动是必然的一样。最后，作为这一假说的结果，姑且承认

不正确推理或错误的现象，无论出现在何处，都是由于其他规律与那些以正确推理为其产物的规律相干扰。即便如此，仍然会存在这样的情况：在理智规律中，有一些数目以这一特殊性质而从其余规律中区分出来，即：理智系统完全在它们的指导下所完成的每一次运动都是正确的，其他规律对它的每一次干扰都不只是干扰，而是违反。不能不感觉到，这种情况会赋予所讨论的规律一种卓越与优越的性质。它们只会更加明显地似乎指示一个并非总能实现的目的，拥有一种内在而正当的权威，但并非总能命令服从。

现在稍加思考就会表明，在自然规律对世界的治理中，没有任何与这种情况类似的东西。无机自然的领域既不允许偏好，也不允许区分。我们不能把她的任何一部分规律与其余部分分开，并宣称它们单独值得服从，--单独负责实现她的最高目的。相反，她的所有规律似乎都是并列的，我们对它们了解得越多，它们的联合作用对于体系的和谐、并且就我们所能理解的范围而言对于体系的一般设计，就显得越必然。无机世界中与表面秩序最显著的偏离，例如行星系的摄动、因外来力量的侵入而中断结晶过程，以及其他类似性质的情况，多么经常地要么融入某种更崇高秩序方案的观念之中，要么在更专注、更有教养的目光下失去其异常面貌，这无需赘述。对这些事实只能给出一种解释，即：真与假之间、正确与不正确之间的区分，存在于理智的过程中，而不存在于物理必然性的领域。当我们从有机存在的较低阶段前进到有意识理智的较高级别时，这种对照逐渐向我们显现。凡生命现象得以表现之处，严格规律的统治都在某种程度上让位于那种神秘的活动原则。因此，尽管动物族类的结构符合某些一般类型，然而这些类型有时也许、并且就美与比例的最高标准而言总是被不完美地实现。当今艺术在其间摇摆的两个选择是：对个体形式的精确模仿，以及通过从所有这类形式中抽象出来，努力达到一种理想的优雅与表现的观念--这种观念也许从未在地球泥土所塑的形式中被完美地表现出来。再者，那些目的论式的适应--通过它们，在不牺牲有机类型的情况下，物种变得适应新的条件或居所--只是缓慢地完成的；然而，显然不是通过外部环境的宿命力量完成的，而是通过从内部唤起一种能量完成的。因此，一切形式的生命都可以与无机自然的被动固定性相对照。但是，由于生命在其中以身体方式表现的类型之完美性在某种程度上具有理想性质，由于我们不能精确界定形式和适应之被提示的最高卓越性，所以这里的对照不如理智过程与纯粹物质世界过程之间的对照那样显著。因为那确定而专门的性质

支配两者的数学规律，更加鲜明地揭示了它们各自以其政府身份所行使的那类权威之间的根本差异。

7. 还有另一个与本章一般对象相关的例子，其中来自不同来源的真理或事实的对照提示出一系列富有教益的反思。它在于把思维规律在其科学表达中的形式，与早期物理思辨以及一切时代的形而上学思辨所倾向于采取的实际形式加以比较。关于这一评论，有两个例证是我在此特别希望提请注意的。

1. 已经表明(III.13)，数值中 unity 的概念与逻辑中 universe 的概念之间存在科学的联系。它们在各自的体系中占据相同的相对位置，并服从相同的形式规律。然而，对于希腊心灵而言，在其活动的早期阶段--这一阶段在人类理智的进展中或许并不比培根或牛顿的时代更少标志性、或许并不更少必然性--当自然的重大问题开始展开，而观察的手段尚且缺乏、其必然性尚未被理解时，“Universe”和“The One”这两个项似乎被视为几乎同一。指定一切存在都被认为是其表现的那种 unity 的性质，是哲学的首要目标。[4]泰勒斯在水里寻求这种根本的 unity。阿那克西美尼和第欧根尼认为它是气。梅塔蓬图的希帕索斯和以弗所的赫拉克利特宣称它是火。巴门尼德在其观点中不那么确定或那么自信，只是宣布一切存在的事物都是 One；梅利苏斯说 Universe 是无限的、不受变化或运动影响的、One、与自身相似，并且运动不存在，只是似乎存在。[5]以一种在亚里士多德的反思性心灵看来与先前思辨的鲁莽相比显得清醒的精神，克拉佐门尼的阿那克萨戈拉也许追随其同邦人赫尔莫提穆斯的脚步，在 Intelligence 中寻求世界及其秩序的原因。[6]贯穿这些思辨中许多的泛神论倾向在色诺芬尼的语言中显而易见，他是埃利亚学派的创始人，他“眺望天空的广阔，宣布 One 就是 God。”[7]也许，unity 可以被设想的形式--抽象地作为数值的或理性的，具体地作为被动的实体，或作为中心的与活的原则--中，几乎没有哪一种我们不在这些古代学说中遇到其应用。我主要引用的亚里士多德的著作充满了这种性质的暗示，尽管

[4]See various passages in Aristotle's Metaphysics, Book I.

[5]*Εδόκει δὲ αὐτῷ τὸ πᾶν ἄπειρον εἶναι, καὶ ἀναλλοίωτον, καὶ ἀκίνητον, καὶ ἕν, ὅμοιον ἑαυτῷ καὶ πλῆρες. κινησίν τε μὴ εἶναι δοκεῖν δὲ εἶναι. —Diog. Laert.* IX. cap. 4.

[6]*Νοῦν δή τις εἰπὼν ἐνεῖναι, καθάπερ ἐν τοῖς ζῴοις, καὶ ἐν τῇ φύσει, τὸν αἴτιον τοῦ κόσμου καὶ τῆς τάξεως πάσης οἷον νήφων ἐφάνη παρ' εἰκῆ λέγοντας τοὺς πρότερον. Φανερῶς μὲν οὖν Ἀναξαγόραν ἴσμεν ἁψάμενον τούτων τῶν λόγων, αἰτίαν δ' ἔχει πρότερον Ἑρμότιμος ὁ Κλαζομένιος εἰπεῖν. —Arist. Met.* I. 3.

[7]*Ξενοφάνης δὲ ... εἰς τὸν ὅλον οὐρανὸν ἀποβλέψας, τὸ ἓν εἶναι φησι τὸν θεόν. —Ib.*

曾经沉溺于这类思辨的人中的较大多数而言，很可能连名字都已消亡。这是一个奇怪却富有提示性的真理：当自然除了天空的面貌之外，必定显得几乎只是一个未被解释的混乱场景，当流行信仰在其众神的多重性中分散不定时，--一种原初统一性的概念，哪怕只是以粗糙的物质形式出现，竟然扎下了最深的根；在许多深思的心灵中，它经受住了一生失望的寒意和无尽探索而存留下来![8]

2. 同样与那条由二次方程表达、并在本论著中被称为 duality 规律的思维规律密切相连的，是古代思想对那种以 dualism 之名著称的哲学思辨形式的倾向。恩培多克勒的学说，[9]通过把自然的表面矛盾归因于“strife”和“friendship”两个对立原则来解释它们；以及留基伯的学说，[10]把一切存在分解为*plenum*和真空两个元素，都属于这种性质。把 universe 比作里拉琴或弓的著名比喻，[11]其“回返的和谐”是对立张力状态的产物，透露出同样的起源。在毕达哥拉斯的体系中--它似乎是 dualism 与从数及其关系的研究中得出的其他元素的结合--承认十个基本对立：有限与无限、偶与奇、unity 与众多、右与左、男与女、静与动、直与曲、光与暗、善与恶、正方形与长方形。在阿尔克迈翁的体系中，同样的基本 dualism 被接受，但没有毕达哥拉斯体系中与之相连的那种确定的、数值的限制。然而，这一观念的重大展开见于那古老的摩尼教学说，它不仅构成波斯宗教体系的基础，而且广泛传播到东方其他地区，并在基督教会的历史上变得令人难忘。dualism 作为一种思辨的起源

---

8 以下诗句由塞克斯都·恩披里柯保存，并归于西洛格拉斐的提蒙，并非没有感人之处：--

> ὡς καὶ ἐγὼν ὄφελον πυκινοῦ νόου ἀντιβολῆσαι
> ἀμφοτερόβλεπτος (δολίη δ' ὀὸψ ἐξεπατήθην,
> πρεσβυγενὴς ἔτ ἐὼν) καὶ ἀναμφήριστος ἀπάσης
> σκεπτοσύνης· ὅππη γὰρ ἐμὸν νόον εἰρύσαιμι,
> εἵς ἔν τ' αὐτὸ τε πᾶν ἀνέλυετο.

我引自里特尔，并冒昧给出以下译文：--

> 愿我所有，不再局限于偏狭之见，或怀疑论的疑虑，而是被真理照亮的心灵!因为，长久受骗，却仍专注于真理，生命的衰暮之年消耗在狂野的漫游中。不安的思想仍然尝试着同样崇高的探求，而那太一、那全体，仍然躲避我的凝视。

[9]Arist. Met. I. 4. 6.
[10]Arist. Met. I. 4, 9.
[11]παλίντροπος ἁρμονίη ὅκως περ τόξου καὶ λύρης.—*Heraclitus*, quoted in *Origenis Philosophumena*, IX. 9. Also *Plutarch, De Iside et Osiride.*

意见，尚未与恶的原则的人格化相联系，而是自然地继那些假定自然之原始统一的学说之后，亚里士多德如此表述："因为自然中显然存在着与善相反的事物，不仅有序与美，也有无序与畸形；又因为恶的事物在数量上明显超过善的事物，畸形的事物超过美的事物，终于有某人引入了争斗与友爱，作为这些纷繁现象各自的原因。"[12]而在希腊，二元论似乎主要是作为一种哲学意见，或作为哲学思辨的附属物，才获得了立足之地。[13]该学说最符合希腊心灵的道德应用，保存在柏拉图那伟大的"存在与非存在"的对立之中--前者与一切善与真、与永恒的理念、与原型世界相联系；后者与恶、与错误、与当前场景中可朽的现象相联系。我们所考察的两种思辨形式在此融合在一起；而且，上述思想倾向的显现，并非仅在希腊哲学的青春与成熟时期。模仿的时代拾取了同样的精神并据为己有。尤其在柏拉图的天才施展支配之处，这种影响更为显著。一切真实存在的统一，其与被视为就其本质而言的真理与善的同一；一切仅仅现象性的存在的幻象、深刻的不真实；这些便是它主要倾向于培育的观点--这样的思想倾向。因此产生了那种强烈的神秘主义倾向，当荣耀的日子--无论是在理智的领域还是在社会事业的领域--在希腊终结之后，这种倾向在她的哲学学派中盛行起来，并在亚历山大的柏拉图主义者中达到了顶峰。伪托的狄奥尼修斯(Dionysius the Areopagite)的论著，将同样的影响--因与亚里士多德学说的接触而大为改变--传递给了中世纪的经院论辩者。说如此受到鼓励的思想基调既与真正的虔诚、也与清醒的哲学同样不相容，这不能提供任何正当的争论理由。人类情感那种亲切的影响，与生活中寻常事物的那种朴素的交往，构成了我们本性之真正(因为是本来 intended)训练的一大部分，若以对甚至最高思想对象的沉思来取代它，那将是糟糕的替代--那种沉思以过度的抽象将其视为某种既不能肯定也不能否定任何可理解命题的东西。[14]我只想略微提及那些相关的关于神性本性的思辨，它们将对立性质的完美结合归于神性，[15]或提及安瑟伦(Anselm)那非凡的论著，

---

[12] Ἐπεὶ δὲ καὶ τἀναντία τοῖς ἀγαθοῖς ἐνόντα ἐφαίνετο ἐν τῇ φύσει, καὶ οὐ μόνον τάξις καὶ τὸ καλὸν ἀλλὰ καὶ ἀταξία καὶ τὸ αἰσχρόν, καὶ πλείω τὰ κακὰ τῶν ἀγαθῶν καὶ τὰ φαῦλα τῶν καλῶν, οὕτως ἄλλος τις φιλίαν εἰσήνεγκε καὶ νεῖκος, ἑκάτερον ἑκατέρων αἴτιον τούτων.—*Arist. Metaphysica*, I. 4.

13 见证亚里士多德从"热"和"干"这两种性质及其对立面推导出元素的著名做法。柏拉图将它们的生成与数学原理联系起来，这是其特点。--《蒂迈欧篇》，第11章。

14 他既是加也是减。

15 尤其参见希尔德伯特开始于"Alpha et Ωmagne Deus"的崇高诗篇。(特伦奇的

旨在依据思想与存在的类比建立一种宇宙理论。[16]在那里，原始的统一被表述为居于那唯一的永恒真理之中。自然对其规律的符合，道德行为者对于正直之指令的服从，都是在行动中所见的同一真理；世界本身不过是其作者自我反思之思想的一种表达。[17]更为显著的是十六、十七世纪间较古老思辨形式的复兴。洛伦佐·德·美第奇(Lorenzo the Magnificent)的朋友与同伴，在英国被称为剑桥柏拉图主义者的隐修士们，以及散布于欧洲的许多沉思的精神，都重新献身于要么解决那古老的问题--De Uno, Vero, Bono(论太一、真、善)，要么证明一切此类探究皆属徒劳无益。[18]所有这些思辨之下的逻辑元素，以及它们似乎至少借取其形式所自的那些逻辑元素，很容易在更为现代的体系的轮廓中追溯出来--尤其是在那种将绝对统一的学说与自我和非我之区分相结合、作为自然之类型的做法中，这构成了黑格尔哲学的基础。思辨的心灵试图攀升到某个真理的高峰，从那里他们可以在演绎思想的秩序中纵览事物的整个框架与联系，这些尝试在它们所产生的理论形式上的差异，不如在所赋予这些形式的解释之性质上的差异为大。[19]而哲学体系对性情与生活之影响的真正问题正在于此。因为，尽管人们一致地将存在的一切形式与条件追溯到一个原始的统一，这并无多大意义，但就他们对那个统一是什么、以及除了单纯的因果性之外还有哪些关系种类的概念而言，情况则不然，

神圣拉丁诗歌。)所有这些思辨所依据的原则，在上一注释所提及的论著中如此表述：Ουδεν ουν ηατοπον, εξ αμψδρον εικονον επι το παντον αιπιον αναβαντας, ηψπερκοσμιοις οπητηαλμοις τηεοραεσαι παντα εν τπς παντον αιπιπς, και τα αλλαελοις εναντια μονοειδος και ηαεομενος.- *De Divinis Nominibus*，第v章。而如此力求达到的那种知识，被描述为"超越光明的黑暗",υπερφωτος γνοφος。(*De Mystica Theologia*，第i章。)弥尔顿(Milton)有类似的想法--

> "因过亮而显得暗，你的裙裾显现。"《失乐园》，第三卷。

与此相比，看《约翰一书》第一章第五节那更为高尚的简洁。

16《独白篇》《论证篇》与《论真理》。

17 "因此，当那至高无上的灵言说自身时，他便言说了一切受造之物。"--《独白》，第二十三章。

18 参见斯宾诺莎、米尔兰杜拉的皮科、H.莫尔等人的论文。这类性质的现代讨论主要与美学相关，其应用的基础包含在奥古斯丁的公式中："Omnis porro pulchritudinis forma, unitas est."

19 例如，焦贝蒂(Gioberti)那博学的神秘主义，尽管其精神与结论与黑格尔的泛神论大相径庭(两者或许同样远离真理)，却在将统一与二重性的原则同时应用于思想和存在这一点上与之相似。有人问道："难道不清楚吗，一切论述最终都归结为上帝、世界和创造的理念，其中最后一个乃是前两个的纽带?"而这个问题在公式"存在者创造诸存在"中得到肯定回答之后，关于该公式又说--"它在其必然与偶然的二重性中囊括了普遍实在，表达了这两个秩序的纽带，并将其置于实体性的创造之中，从而将实在的二重性归结为一个唯一的原则，归结为存在者之原初的统一--那存在者不是抽象的、总括的、属类的，而是具体的、个体化的、绝对的、创造性的。"--*Del Bello e del Buono*，第30、31页。

它对自身所维持的关系。在此也可以感受到纯粹逻辑的无能为力，感受到对知性规律最深刻的知识不足以解决那些更贴近我们心灵的问题，随着渐进的岁月从我们的生命中剥去其金色黎明的幻象。

8.如果考虑到人类意见极其任意的性质，那么就不会期望，这里也不主张，上述就是思辨的人们为存在问题的猜测性解答所塑造的唯一形式。在特定影响下，其他形式的学说也出现了，然而常常掩盖着上述所描绘的那些形式。[20]

但是，我们所考察的那些特定理论的广泛流行，连同它们与所表述的思维规律的明显类比，可以正当地被认为指示了两个体系之间的联系。正如所有其他心灵活动与过程都受其特有谬误的困扰，那种在本著作中被称为二重性规律的思维规律的运作，也可能有其特有的致错倾向，将单纯的不一致抬高为对立，从而形成一个我们必然视为由相互补充的部分所构成的世界，构设出一个从根本上被对立力量所分裂的世界的概念。这，连同一些从现象得出的大胆而仓促的归纳，也许就是二元论的起源--这与二元论无论以何种形式是否为真理论的问题无关。然而，在此更重要的是详细考察这些古代思辨形式(在当今复兴)对真实知识之进展的关系；而关于这一点，我愿依照前一节所述，补充以下意见：

1. 一切健全的哲学，若被视作确定事物实际构造的手段，都会对这类思辨作出否定的裁决。自然知识的进步或许趋向于承认自然中某种核心的统一性。至于那种由系统各部分相互关联所构成的统一性，则几乎无可置疑；而有才能的人也曾不无根据地推测，物理力之间存在着比仅仅一个系统的观念所能引导我们设想的更为紧密的关联。此外，或许在那被设想的统一性怀抱中，蕴含着某些划分与重新结合的一般原则，这些原则在至高意志之下，是自然之相关多样性的诸多根源。性别与极性的事例已被援引来支持这样一种观点。作为一个假设，我冒昧补充一句：事物外在的构造以某种类似于此的方式与心灵内在的构造相对应，并非很不可能。但这样一种对应，若终有一日被证明存在，也将作为人类知识的最后归纳而出现，而非作为科学探究的第一原则。自然的秩序

20 支持这一陈述的证据，可见于最近以*Origenis Philosophumena*为题出版的非凡论著(其标题的正确性似乎可疑)。该书记录的基督教早期腐化，尽管其中许多显然从其俄斐特派特征来看源自异教的渣滓，却表现出某些持久的哲学思辨形式。它们大多要么属于二元论体系，要么承认三个本原--原初的或派生的--其中两个本原之间可追溯出二元论关系--*Orig.Phil.*，第135、139、150、235、253、264页。

发现是从特称到全称的，并且可以有信心地断言，我们在这条道路上尚未前进得足够远，以致能够确定一切自然的特殊差异将最终融入哪些终极形式，并从这些形式获得它们的解释。

2. 即使思维形式与自然实际构造之间的这种对应被证明存在，无论它被设想为在两个体系之间建立起何种联系或关系，都丝毫不会影响它们相互独立的问题。它在任何意义上都不会导致这样一个后果：一个体系仅仅是另一个体系的产物。对形而上学思辨的过度沉迷，在某些事例中似乎产生了趋向这类幻觉的倾向。因此，在为了解释恶的存在而作出的许多尝试中，有人试图赋予这一事实一种纯粹相对的性质--将其建立在与同样相对的善的元素的一种逻辑对立之上。只需说，这一假定纯属无端。恶在无限智慧与纯洁的眼中可能是什么，我们至多只能模糊地猜测；但对我们而言，在其一切形式中，无论是痛苦还是缺陷，无论是道德过失还是报应的灾祸，它只能呈现一个面貌--一个悲哀而严峻的实在，针对它，基于某种高于最高审慎考虑的东西，我们本性的全部预防力量都可以施展出来。现在，关于刚才所考察的这一特定问题所说的话，同样适用于哲学中许多其他有争议的问题；例如，空间与时间的外在实在性。我们没有任何理由将它们化为纯粹知性的形式，尽管它们无疑决定着我们现在知识的范围。而且，更一般地说，现代许多思辨中那种极端主观的倾向是毫无根据的。每当在理智看来，不同的假说与一个观察到的事实同样一致时，意识关于它们相对价值的本能证词就必须被允许具有权威。

3. 如果思维规律的研究既不能帮助我们确定事物的实际构造，也不能解释那构造中所包含的、曾使历代智者困惑、使深思者悲伤的事实--那么它更不能使我们超越我们存在的当前状况，或为那种断言对无限者与无条件者具有直觉知识之可能性的学说提供认可--无论这种知识是在自然领域之内还是之上寻求。我们永远不能说理解了那在思想中被表现为一个无限抽象过程之极限的东西。一个无限的进程对于有限的能力是不可能的。但尽管我们不能理解无限者，却甚至可能有科学根据相信人性是在某种与无限者的关系中构成的。我们若不至少隐含地涉及普通语言以“宇宙”和“永恒”这两个词所表达的元素，就不能完善地表达思维规律，或在其最一般的意义上确立以它们为基础的方法。正如在几何学的纯粹抽象中一样，在逻辑的领域中也可以看到，真理的帝国在某种意义上大于想象的帝国。而且，正如有许多特殊的知识部门

只能从外部观点才能完整地考察，同样，仅应用于有限对象的理智过程理论，似乎也涉及对一个一切界限都被撤去的思想领域的承认。因此，如果一方面我们不能在思维规律及其类比中发现一种过于大胆的神秘主义结论的充分证明基础；另一方面，我们若将它们视为完全无所启示，那就错了。作为我们理智本性的一部分，它们以仅仅规定形式推论之条件以外的方式表现自身，似乎并非不可能。无论我们有什么理由将它们与爱奥尼亚和意大利哲学家的物理思辨的独特倾向联系起来，同样的理由也存在于将它们与一种既更为常见又更为正当的思想倾向联系起来。至少，我们不应当把那种沉思的精神归因于任何偶然的影响--这种精神在最为感受到永恒真理之意识时，最乐于与自然的外在壮丽交流--它在夜空中读到秩序的明亮显现；或在山间某处荒野景色中，感受到某种超出那抽象永恒之暗示的东西，而那抽象永恒早在它们黑暗的基础奠定之前就已流逝。[21]

9. 我们不再进一步追究这一思路--在某些人看来它或许过于思辨--让我们简要回顾一下我们已被引向的那些积极成果。已经表明，我们的本性中存在着一些能力，它们使我们能够从经验的特称事实上升到构成科学基础的一般命题；同样也存在着一些能力，其职责是从被承认为真的一般命题中推出它们所包含的特称结论。已经看到，这些能力在其运作中服从于能够以精确的科学方式加以表述的规律，但又被赋予一种权威，这种权威与自然规律的权威相比，是独特的、*sui generis*、而非派生的。此外，已经表明，如此向我们揭示的理智程序与我们周围这一事物体系的诸条件之间存在着明显的契合--我指的是这样一些条件：由一般相似性联系起来的各个物种的存在，在一般规律之下相互关联的各个事实的存在；连同那种恒久性与秩序的结合，这种结合在赋予已获得的知识以稳定性的同时，也为无限进步的希望奠定了基础。人性，完全独立于其被观察到的或表现出的倾向，被看到是被构成在与真理的某种关系之中的；而这种关系，作为思辨知识的对象，正如物理科学的各个部门在同一方面被考察时一样，能够在其细节上被研究，而且同样值得被如此研究。我愿特别提请注意那种关于理智构造的观点，它把理智表述为服从于其性质确定的规律，但这些规律并非凭借必然性的力量而运作；它表明理智从命运的统治下被赎回，而又未被抛弃于偶然的无法则状态。我们不能接受这一观点，除非至少把那些暗示接受为或然的，这些暗示依据

21 诗篇 xc.2

类比的原则，似乎就我们本性的另一个更高方面提供了说明--即它在义务领域以及在知识领域中一样服从于固定的规律，这些规律的权威并不在于力量--它参照一个理想标准和一种最终目的而被构成。的确，人们曾认为，科学追求会养成一种倾向，要么忽视道德世界与物质世界之间的具体差异，要么把前者视为在任何恰当意义上都不是精确知识的对象。毫无疑问，一切排他性的追求都倾向于产生片面的观点，而且情况可能是，一个长期而深深地沉浸于对那些物理必然性的统治无可置疑且至高无上的景象的沉思之中的心灵，可能难以承认另一种事物秩序的可能性。但正是由于这种对某一特定知识领域的献身的排他性，所论的那种偏见才得以占据心灵，如果它确实占据了的话。把科学方法应用于理智现象的研究，以公正的探究精神进行，并且不忽视那些错误与扰乱的元素--它们必须被接受为事实，尽管在我们本性的构成中它们不能被看作规律--似乎提供了一种更为公正的类比的材料。

10. 如果有人问，上述这类研究指向什么实践的目的，那么可以回答说，存在着各种各样的对象，就这些对象而言，人们行动的方针主要由他们对人性的思辨观点所决定。教育，就其最广泛的意义而言，就是这些对象之一。一切对其本性和方法的探究的最终基础，都必须奠立于某种先前的理论之上：人是什么，他的各种能力被设计来达到的目的是什么，有哪些动机具有力量去影响它们持续行动并引出其最完美、最稳定的结果。可以怀疑，这些问题是否曾在此处所提示的种种关系中，被充分地、同时又公正地加以考察。通过研究古代的纯粹典范而对趣味进行最高程度的培养，对现代物理科学的事实和理论的最广泛的熟悉，从我们本性的这一更广阔的方面来看，只能表现为一种完善的理智训练的各部分。从同一观点来看待所要采用的手段，我们可能被引向询问：当今几乎唯一地诉诸竞争精神或贪欲的做法，是否并不倾向于削弱那些更为持久的动机的影响，这些动机似乎已被植入我们的本性之中，以直接服务于所着眼的目的。关于这些问题，以及关于许多其他问题--权威的正当界限，思想自由与情感、习惯、举止的纪律之间的调和，以及问题的整个道德的方面--我们遇到的是怎样的意见不定、怎样的实践分歧啊!然而，在理性的清醒看法中，在人类努力的范围之内，没有任何对象比这更为重要、更为关键，如我所说，就其最广泛的意义加以考察。现在，任何倾向于使我们对人性在其任何真实方面的看法变得更加精确和明确的东西，都按同样的比例倾向于把这些问题的范围缩小，并限制其可能解决的界限。这样，甚至思辨的探究也能证明富有最重要的行动原则。

11. 也许这类思辨最明显正当的关联，将是关于数学在人类知识体系中的地位问题，以及数学研究作为一种理智训练手段的性质和职责问题。任何关注过晚近讨论进程的人都不会认为这个问题不重要。那些主张数学在这两方面都具有根本性地位的人，从事物的实际构成中引出了他们最强有力的论据之一。物质框架在其一切部分都服从于数的关系。一切力学的、化学的、电的、热的作用，似乎不仅在自身中是可度量的，而且通过一种完全确定的数值关系相互联系，甚至达到相互转化的程度。但在我看来，所论的这种意见立足于比这更深的基础之上。思维规律，在其一切概念和推理的过程中，在语言作为其表达或工具的一切那些运作中，与公认的数学过程的规律属于同一种类。这并不是主张，我们必须熟悉那些规律才能连贯地思考，或者按这些词的通常意义才能很好地推理。人们作出推论时，对整个过程所依赖的那些元素毫无意识。更不是想要把推理能力抬高到观察、反思和判断的能力之上。但正是基于人类思想在其终极元素上被追溯时以数学形式显示自身这一根据，我们有一种推定：数学科学凭借我们本性的构成，在人类知识中占据一个根本性的地位，而任何完全忽视它们的心理培养体系都不可能是完备的或根本性的。

但正是同一类考虑以同等的力量表明了那些人的错误，他们把数学及其应用的研究视为知识或训练的充分基础。如果物质框架的构成是数学的，它并不仅仅是数学的。如果心灵在其形式推理的能力中，无论有意识还是无意识，都服从数学规律，那么它通过其情感和行动的其他能力，通过其对美和道德适宜性的知觉，通过其情感和爱慕的深层源泉，要求与另一种事物秩序发生关系。此外，还有一种理智视野的广度，一种对一切形式和表现中的真理的同情力量，它不是由辩证能力的力度和精细来衡量的。甚至物质宇宙在其无限广袤、普遍秩序和规律恒常性中的启示，也未必被那个以最细微的精确性追溯了伟大证明的步骤的人最充分地领会。而如果我们把生活的利益和义务纳入我们的考察范围，那么任何纯粹推理的过程能使我们理解它们所提出的那些更为重要的问题又是多么少啊!因此，正如数学的或演绎的能力的培养是理智训练的一部分一样，它也真正地只是一部分。那种想要要么放逐要么使知识的任何一门部门或心灵的任何一种能力成为至上的偏见，不仅暴露出判断的错误，而且暴露出那种与对真理的纯粹献身不可分离的理智谦逊的缺陷。它僭取了批评的职责

事物的这样一种构造，既非任何人为约定所确立，亦非人力所能废除。它摒弃了那种古老而公正的真理概念--真理虽千殊万别，却仍是一体。在我们中间实际存在的这种错误，其大部分似乎应归因于科学教育那种特殊而孤立的性质--而科学教育反过来又倾向于助长这种性质。哲学的研究，尽管有少数显著的例外情形，却未能跟上各知识部门的进展，而确定这些部门之间的相互关系正是哲学的职责所在。然而，我们不可能不把所论及的这一特殊弊病视为一个更大体系的一部分，并把它与那种过于流行的、将知识视为纯粹世俗之事的观点联系起来，也与前面已经提到的那些动机的过度支配联系起来--这些动机在其适当范围内是正当的，它们建立在对其世俗利益的关注之上。在极端的情形下，不难看出，这些动机若持续发挥作用，既不受任何更高行动原则的约束，也不受优越心灵的个人影响的矫正，就必定会降低关于知识对象的思维标准，并使任何可能尚存的高尚信仰之元素变得空洞无效。而且，这些条件越是得到实现，同样的结果就必定随之而来。也许正因如此，我们有时在那些除了集体人性的变动不居的方面之外不承认任何更高事物的人中间，反而比在那些在理智上宣称效忠于众光之父的人中间，更能发现关于真理之统一性、其各部分之活的联系以及它们对一种道德目的的从属关系的更为公正的概念。但这些问题在此无法进一步探讨。对某些人来说，它们会显得与本书所宣称的设计无关。然而，对它们的思考是自然而然地产生的，或是出于该设计所涉及的思辨，或是在为完成该设计所必需的阅读与反思过程中产生的。

结束。

*** 古腾堡电子书《思维规律的研究》项目结束 ***

***** 此文件应命名为 12345-pdf.pdf 或 15114-pdf.zip ***** 此文件及各种格式的所有相关文件可在以下位置找到：https://www.gutenberg.org/1/5/1/1/15114/

更新版本将取代前一版本--旧版本将被重命名。

从不受美国版权法保护的印刷版本创建这些作品，意味着没有人拥有这些作品的美国版权，因此基金会(以及您!)可以在美国未经许可且无需支付版权使用费地复制和分发它。本许可协议“一般使用条款”部分规定的特殊规则适用于复制和分发 Project Gutenberg-tm 电子作品，以保护 PROJECT GUTENBERG-tm 概念和商标。Project Gutenberg 是注册商标，如果您对电子书收费，则不得使用该商标，除非遵循商标许可条款，包括为使用 Project Gutenberg 商标支付使用费。如果您对本电子书的副本不收取任何费用，则遵守商标许可非常容易。您可以将本电子书用于几乎任何目的，例如创作衍生作品、报告、表演和研究。Project Gutenberg 电子书可以被修改和

这份文件是怎么做出来的

本译本是《思维规律的研究》的中文全译本，共 336 页。表格、图注、页眉页脚、编号层级都按原文位置一一还原，未做任何删节。

你手上如果也有英文文件要处理

- 合同、标书、标准、专利、报告：翻译后保留原版式，0.15 元/页
- PDF 转 Word：100 页内免费，超出 0.1 元/页
- 扫描件、图片版 PDF：先 OCR 再转 Word，免费
- 不用注册、不用登录，传上去直接下载

打开下面这个地址，把你自己的文件传上去试试：

https://www.ivyivy.com.cn/boole-laws-of-thought-zh

支持私有化部署（需按贵方模型与合规要求评估）

扫码关注服务号

本译本由机器翻译生成，仅供阅读参考；专业技术判断与合规引用，请以英文原文为准。

本页为译制说明，不属于原文件内容。